# Les notions d'espace en géométrie. De l'Antiquité à l'Age Classique.

Thomas de Vittori

# Des figures à l'espace

Thomas de Vittori

# Des figures à l'espace

## L'émergence de la notion d'espace dans la géométrie de l'Antiquité à l'Âge Classique

# Introduction

> Géométrie (...) est la science des propriétés de l'étendue, en tant qu'on la considère comme simplement étendue et figurée. Ce mot est formé de deux mots grecs gê ou gaïa, terre et metron, mesure ; et cette étymologie semble nous indiquer ce qui a donné naissance à la Géométrie : imparfaite et obscure dans son origine (...) elle a commencé par une espèce de tâtonnement, par des mesures et des opérations grossières, et s'est élevée peu à peu à ce degré d'exactitude et de sublimité où nous la voyons.
>
> Jean le Rond d'ALEMBERT

La perception des impôts, les calculs d'héritages ou de rendements agricoles ont dès l'origine nécessité des spécialistes capables de mener à bien ces études. Étymologiquement, la géométrie consiste en l'art de mesurer les terrains, mais les mathématiciens ont très vite dépassé ces considérations d'arpenteurs pour élaborer une discipline théorique largement indépendante. Au cours de leur histoire, les mathématiques ont subit de nombreux bouleversements conceptuels. L'aventure des nombres, par exemple, est bien connue[1]. Elle commence par l'élaboration des premiers systèmes de

[1] On pourra consulter G.Ifrah, *Histoire universelle des chiffres* [24]

numérations chez les summeriens et les babyloniens, se poursuit par l'utilisation des nombres rationnels, relatifs, irrationnels, réels, complexes, etc. jusqu'aux fondements axiomatiques au début du 20$^{e}$ siècle. Mais qu'en est-il de la géométrie ? Et qu'est-ce qu'une géométrie ? La réponse moderne, qui s'appuie sur les définitions proposées au 19$^{e}$ siècle par Felix Klein[2] et qui fait de cette partie des mathématiques une sous-branche de l'algèbre, a quelque chose d'insatisfaisant. En effet, trop éloigné des considérations des premiers géomètres, ce regard *a posteriori* masque l'évolution des idées et la place considérable de cette discipline dans l'histoire de l'humanité. Le passage d'une science de la Terre à une science des Espaces, dont les géométries non euclidiennes ne sont finalement que les filles, interroge l'historien des sciences. Tout au long de son développement, la géométrie tisse des liens avec une certaine idée de l'espace. Située au carrefour de nombreuses disciplines comme l'astronomie, l'optique, les mathématiques, mais aussi la philosophie ou encore la théologie, la question de l'espace ouvre un champ trop vaste pour pouvoir être embrassé en une seule fois. Pour étudier la géométrie en tant que branche des mathématiques, une approche possible consiste en l'étude des traces objectives laissées par les questionnents sur l'espace dans les ouvrages savants. Ces livres d'auteurs renommés, au contenu technique à la pointe des recherches de leur époque, ont été copiés, recopiés, pris en note, soigneusement conservés, et ont ainsi traversé les âges. Certes, ces témoins précieux ne constituent que de la partie émergée de l'iceberg. Mais, à l'image de ces petits morceaux de glace sur l'océan qui révèlent les aléas climatiques, les traités de géométrie sont liés à des changements conceptuels multiples dont ils permettent de rendre compte pour partie. À travers les textes des géomètres de l'Antiquité au 17$^{e}$ siècle, ce qui va suivre tente de relater ces moments de l'histoire des mathématiques.

[2] F.Klein, *Le programme d'Erlangen* [27]

1

# La notion d'espace chez les géomètres grecs

> La géométrie est un inventaire des formes, en vue de déterminer des relations de distance et de grandeur entre les objets de l'expérience.
>
> ---
>
> ALAIN

## *Les figures comme objets*

Rédigés vers 300 av.J.-C., les treize livres des *Éléments* d'Euclide sont construits de manière à former un ensemble mathématique cohérent dont la structure générale débute par des définitions, auxquelles sont adjoints des postulats et des notions communes. Au début des livres I et XI, Euclide définit le point, la ligne, la surface et le solide.

> 1. Le point est ce dont la partie est nulle.
> 2. Une ligne est une longueur sans largeur.
> 5. Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur[3].

[3] EUCLIDE, *Éléments* [15] p.1

1. Un solide est ce qui a longueur, largeur et profondeur[4].

Ces définitions, qui visent à concevoir le point, la ligne, la surface et le solide dans toute leur abstraction, ne sont pas directement opératoires. De plus, la lecture des livres I à IV, VI, et XI à XIII des *Éléments* montre que ceux-ci portent principalement sur des triangles, des cercles, des polygones, des polyèdres ou encore des sphères, qui sont qualifiés de figures. Ainsi, l'objet du géomètre n'est pas le point, ou la ligne, dont les définitions apparaissent en premier, mais la figure géométrique[5].

## *La figure dans les Éléments*

Dans la liste des définitions du premier livre des *Éléments*, la définition de la figure intervient à la quatorzième place. À ce stade, Euclide a posé ce qu'étaient le point, la ligne avec le cas particulier de la ligne droite, l'angle et ses diverses espèces, ainsi que la surface plane ou non. Les définitions de la limite et de la figure proprement dite viennent ensuite.

13. On appelle limite ce qui est l'extrémité de quelque chose.
14. Une figure est ce qui est compris par une seule ou par plusieurs limites[6].

La définition 13 renvoie aux définitions de la ligne et de la surface dont les extrémités sont respectivement des points et des lignes. Ce qu'Euclide nomme des limites sont donc les points et les lignes. Cependant, prendre un nombre quelconque de limites, points ou lignes, ne suffit pas pour faire

[4] [15] p.396
[5] Voir [29]
[6] [15], p. 1

une véritable figure au sens euclidien, celle-ci doit être fermée[7]. Ceci exclut le cas de la ligne seule qui peut, au mieux, être la limite d'une éventuelle figure. Cette distinction rappelle la classification de Geminus[8], pour qui, les lignes se présentent selon deux espèces : les composées et les non composées. Parmi les lignes non composées, Geminus distingue les lignes formant des figures, comme le cercle ou l'ellipse, de celles qui s'étendent indéfiniment comme la droite ou la parabole. Pour Euclide, le fait que l'étendue d'une figure soit finie permet de la différencier de la surface. Au début[9] du livre XI, il réutilise la définition de la figure comme ce qui est compris par certaines limites pour les polyèdres et les solides de révolutions. Proclus, dans son *Commentaire au premier livre des Éléments*[10], explique que la notion de limite chez Euclide renvoie à « un circuit délimitant » qui détermine une certaine aire, ou un volume. Il y a dès lors une différence fondamentale entre la ligne, qui « enveloppe et intercepte des choses environnantes », et le point qui est uniquement une extrémité. Pour le commentateur, la limite est l'élément premier de la figure car, « toutes les choses enveloppées sont déterminées par ce circuit », c'est-à-dire que la figure est ce qui va déterminer la quantité[11].

À partir de cette notion de figure, Euclide en décrit les principales sous-espèces. Dans le plan, il s'agit du cercle et de ses différentes portions, des figures rectilignes avec les cas des

[7] Voir le commentaire de Vitrac [16], Tome I

[8] Pour une biographie de Geminus, voir [21], Tome II

[9] [15], p. 396

[10] [33], p. 122-130

[11] « En la concevant ainsi en effet déjà avec la matière, et en l'imaginant dimensionnée, il l'appelle à bon droit déterminée et limitée. Toute chose qui possède de la matière intelligible ou sensible a une limite et n'est pas elle-même un terme ; mais ce qui limite en soi est une chose et ce qui est limité en est une autre ; et cette chose n'est pas dans la limite elle-même, mais est comprise par celle-ci ; car elle est incorporée à la quantité, coexiste avec elle, et la quantité lui devient assujettie. », Proclus, [33], p. 127

divers triangles, des quadrilatères et des multilatères. En géométrie des solides, Euclide définit les pyramides, les prismes, la sphère, le cône, le cylindre, et les cinq solides platoniciens (tétraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre et icosaèdre).

Dans les *Éléments*, la figure est donc conçue comme un tout déterminé par l'intermédiaire de ses limites.

## *La figure dans les Données*

Dans les *Données*, Euclide ne redéfinit pas la figure, mais il ajoute un certain nombre de précisions quant à ses caractéristiques. Il distingue trois attributs différents : la grandeur, la forme et la position. Ces caractères ne concernent pas, par définition, les mêmes objets, mais *in fine*, ils forment les composantes essentielles d'une figure.

## *La donnée de grandeur*

Pour Euclide, la notion de grandeur[12] s'applique aux espaces, c'est-à-dire aux surfaces ou volumes, aux lignes et aux angles. Une figure est donnée de grandeur s'il est possible de l'égaler à une autre dont la grandeur est connue. Euclide ne définit pas mathématiquement la grandeur, pas plus qu'il ne dit ce que signifie « être égal ». À son époque, définir la grandeur est avant tout une question philosophique. Pour situer cette question, il faut rappeler que, selon Aristote, la notion de quantité[13] se divise en deux espèces, l'une dite discrète, l'autre dite continue et caractérisée par la possibilité d'être divisible indéfiniment. La partie des mathématiques qui traite de la quantité discrète est l'arithmétique. La grandeur géométrique relève de la quantité continue. Chez Aristote, les notions d'égalité et d'inégalité font partie de la quantité. Plus précisément, on parlera d'égalité et de son

[12] 1. Des espaces, des lignes, et des angles, auxquels nous pouvons trouver des grandeurs égales, sont dits donnés de grandeur.[15], p. 517

[13] Pour une étude complète, voir G.G.Granger [20]

contraire, uniquement pour la quantité qu'elle soit discrète ou continue. Dans sa pratique, les géomètres combinent un continu conçu à partir de la divisibilité à l'infini et la mise en œuvre d'une égalité pour la grandeur géométrique. Par exemple, dans la proposition I-35, Euclide cherche à réaliser l'égalité de deux parallélogrammes. Pour démontrer que

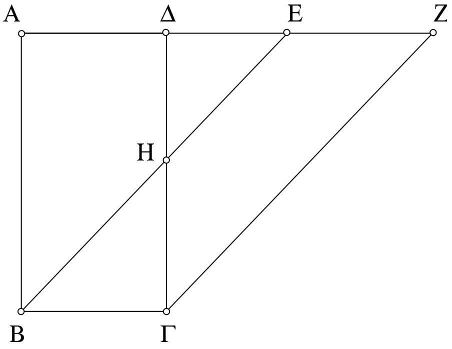



Fig. 1 – Proposition I-35

ABΓΔ est égal à EBΓZ, tous deux ayant une base commune et placés entre les mêmes parallèles (figure 1), il commence par montrer que les triangles EAB et ΔΓZ sont égaux en utilisant la proposition I-4 sur la superposition des triangles. À ces deux triangles, il retranche le triangle ΔHE puis ajoute HBΓ et obtient ainsi l'égalité recherchée. Dans cette démonstration, Euclide divise les figures en d'autres figures dont il peut prouver l'égalité. La notion de continu comme quantité indéfiniment divisible assure la possibilité d'une telle opération. L'égalité de grandeur, et donc la donnée de grandeur, renvoie à une mesure intuitive d'une étendue (ligne, surface ou volume) par ailleurs conçue philosophiquement. Mais, Euclide ne se contente pas de découper une figure, il fait de même avec une partie du plan. Lorsqu'il considère le triangle ΔEH, il présuppose un certain découpage de l'espace dans lequel se trouve la figure et donc l'acceptation, au moins implicite, que l'espace environnant la figure est géométrique. C'est également cette intuition de l'espace que l'on retrouve dans un résultat rapporté par Aristote. Selon le penseur de Stagire, la pyramide et le cube sont les deux seuls solides pouvant remplir un espace. Comme le souligne T.Heath[14], il s'agit d'une extension en dimension trois d'un résultat similaire dans le plan, connu des pythagoriciens. Ceux-ci ont montré que les trois seules figures qui peuvent remplir un espace dans le plan sont le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone régulier. Dans son commentaire, Pappus fournit de plus amples explications au cours de la preuve qu'il donne de ce deuxième résultat.

> En effet, l'espace qui règne autour d'un même point est rempli par six triangles équilatéraux en raison de six angles dont chacun vaut les deux tiers d'un angle droit ; par quatre carrés en raison de quatre angles droits ; et par trois hexagones en raison de trois angles d'hexagone dont chacun vaut un angle droit et un tiers[15].

Ensuite, Pappus prend le contre-exemple du pentagone dont trois ne suffisent pas pour remplir l'espace, et quatre l'excèdent. Cette preuve, qui repose sur un raisonnement élémentaire sur les angles, montre l'importance de « l'espace qui règne autour d'un point. » Dans ce contexte, le plan et l'espace doivent être *géométriques* ; tout au moins à proximité des figures.

### *La donnée d'espèce*

La deuxième notion introduite par Euclide dans les *Données* est la donnée dite d'espèce. Sa définition intervient immédiatement après celle de « raison donnée. » Une raison, c'est-à-dire un rapport de deux grandeurs commensurables

[14] [21], Tome I, p. 340-341
[15] [30], Tome II, p. 238

ou non, est donnée si on peut « en trouver une qui soit la même[16]. »

> Des figures rectilignes, dont chacun des angles est donné, et dont les raisons de leurs côtés entre eux sont données, sont dites données d'espèce[17].

Cette définition porte sur les figures telles qu'elles sont définies dans les *Éléments* mais elle se limite aux seules figures rectilignes. Fondée sur les notions de grandeur et de raison définies précédemment, elle est purement mathématique. Dans le cadre de la donnée d'espèce, il ne s'agit pas de connaître les longueurs des côtés, mais seulement les rapports entre eux, en fait, Euclide définit ce que vont être des figures semblables.

Dans la pensée aristotélicienne, la matière a nécessairement une forme[18] et la notion d'espèce semble être le pendant mathématique de ce concept philosophique. Rapporté à la géométrie, définir la forme d'une figure nécessite non seulement de rendre compte de l'image sensible de celle-ci, mais aussi de trouver un moyen d'exprimer sa structure propre. Dans le cas des figures rectilignes, Euclide choisit d'utiliser les angles et les rapports pour en définir l'espèce. Ce faisant, un triangle dont un angle est droit sera effectivement différencié d'un autre qui en serait dépourvu. L'espèce, ou la forme, de figures non rectilignes peut s'avérer difficile à déterminer et Euclide les exclut pour se limiter aux figures dont les rapports des côtés sont susceptibles d'être connus. Les seuls exceptions sont les cercles et les solides de révolution pour lesquels la forme est issue de la définition[19].

---

[16] L'égalité relève ici de la théorie des proportions présentée au livre V des *Éléments*.

[17] [15], p. 517

[18] [41], p. 233-243

[19] Dans le cas du cercle et de la sphère, la forme est unique contrairement aux cylindres et cônes droits, qui peuvent varier d'angle ou de rapport.

### *La donnée de position*

Avec la donnée d'espèce, Euclide définit la notion de figures semblables. Cependant, ceci ne suffit pas pour rendre compte d'un certain nombre de situations géométriques. Par exemple, pour deux triangles opposés par le sommet ou deux cercles sécants, la connaissance de la forme seule ne permet pas de connaître la situation des deux objets qui peuvent, par ailleurs, être de même espèce. Ajouter la donnée de grandeur n'est pas suffisant car deux cercles peuvent être égaux et pourtant produire soit un, soit deux, soit aucun point d'intersection. Euclide doit donc introduire un troisième type de donnée : la donnée de position.

> 4. Des points, des lignes, et des angles qui conservent toujours la même situation, sont dits donnés de position[20].

La notion de position concerne les objets premiers de la géométrie que sont le point, la ligne et l'angle et une position pour la figure, si elle existe, devra nécessairement découler de celle des points, des lignes et des angles qui la déterminent. Concernant la position d'un point, la proposition 25 des *Données* est très explicite.

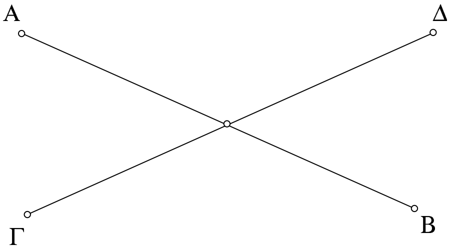



Fig. 2 – Proposition 25

[20] [15], p. 517

> Proposition 25 : Si deux lignes données de position se coupent, le point où elles se coupent est donné de position[21].

Pour démontrer ce résultat, Euclide considère tout d'abord deux droites AB et ΓΔ données de position qui se coupent en E (figure 2). Le point E sera donné de position car « si cela n'est pas, le point E se déplacera, et alors l'une des lignes AB, ΓΔ changera de position. Mais aucune de ces lignes ne change de position. » La preuve repose sur le non-changement de position des deux droites. Cette même invariabilité est également à l'œuvre dans la preuve de la proposition 27 où le géomètre montre que si une droite AB est donnée de grandeur et de position, et que de plus l'une des extrémités est donnée de position, alors l'autre extrémité est aussi donnée de position. La démonstration fait appel à l'immobilité des objets par laquelle on obtient la position du point. On peut remarquer qu'à ce stade, il existe deux méthodes pour déterminer la position d'un point, l'une par l'intersection de deux lignes, l'autre par l'intervention de la notion de limite. Cependant, cette dernière caractérisation utilise l'invariabilité de la grandeur qui nécessite d'être explicitée. Prenant peut-être les devants d'une telle critique, Euclide ajoute une autre preuve à cette proposition 27. Il considère maintenant une circonférence ΓΒΔ (figure 3) qui sera donnée de position et qui vient intersecter la ligne AB en B. Par la proposition 25, il peut conclure sur la position du point B. Dans cette deuxième preuve, la grandeur fixée est remplacée par l'intersection de deux lignes. Ceci permet de déduire directement le résultat des propositions précédentes et la position du point devient donc essentiellement déterminée par intersection.

Concernant les lignes, il y a, dans les *Données*, trois moyens d'obtenir une droite donnée de position. Le premier consiste à revenir à la notion de limite. Dans la proposition 26, Euclide écrit que « si les extrémités d'une ligne droite

[21] [15], p. 535

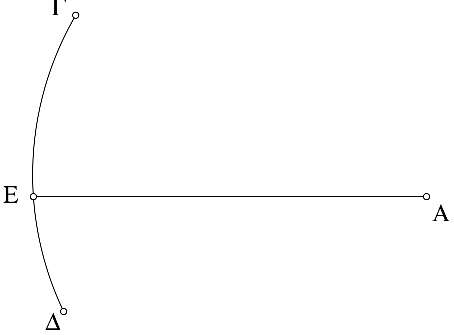



FIG. 3 – Proposition 27 (bis)

sont données de position, cette droite est donnée de position et de grandeur » et prouve ce résultat en s'appuyant sur l'immobilité des points. L'une des extrémités étant fixe, si la droite changeait de grandeur ou de position, l'autre extrémité bougerait, or ce n'est pas le cas par hypothèse. On peut ainsi obtenir une droite donnée de position par l'intermédiaire de ses extrémités. Implicitement, Euclide utilise l'unicité de la droite reliant deux points dont l'existence[22] est possible d'après les postulats du livre I des *Éléments*, mais dont l'unicité n'est pas prouvée. Le deuxième moyen pour obtenir une droite donnée de position s'appuie également sur un postulat de la géométrie euclidienne, au sens moderne cette fois de cette expression : l'unicité de la parallèle à une droite passant par un point extérieur à celle-ci. Ceci se situe dans la proposition 28 où Euclide montre, toujours avec un raisonnement sur l'immobilité des objets, que : par un point donné de position et parallèlement à une droite donnée de position passe une droite donnée également de position. Ces premières approches utilisent les mêmes notions, par contre, il y a dans les propositions 29 et 30, une troisième caractérisation de la

[22] À propos de la droite chez Euclide, voir M. FEDERSPIEL [17]

position d'une droite très différente. Dans ces deux propositions, Euclide montre que la position d'une droite peut être déterminée par l'intermédiaire d'un angle. Dans la proposition 29, par exemple, on mène d'un point donné à une droite donnée, une ligne droite faisant un angle donné. Cette fois, en plus de l'immobilité due à la position, Euclide utilise la constance de l'angle et montre que si la droite ΓΔ bougeait pour venir en ΓE, alors les angles ΔΓA et EΓA ne seraient plus égaux (figure 4). Implicitement, il utilise le fait que la

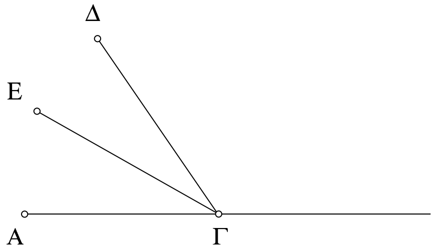



Fig. 4 – Proposition 29

droite, tombant entre deux autres, détermine un angle plus petit. La notion d'angle intervient comme un moyen pour déterminer la position et ainsi s'ajoute à la notion d'intersection rencontrée auparavant. Euclide use indifféremment des trois procédés et, par exemple, l'intersection intervient également dans la proposition 31 où le géomètre coupe une droite par un arc de cercle pour déterminer une droite donnée de position.

La donnée de position porte sur trois types d'objets, le point, la ligne, et l'angle. Contrairement aux points et aux lignes, la donnée de position pour l'angle ne fait pas l'objet d'une étude systématique de la part d'Euclide. Les *Données* sont presque muettes à ce sujet. Pourtant la notion d'angle contribue à la définition de l'espèce pour une figure rectiligne, mais aussi intervient à plusieurs reprises *via* la notion de figures « semblablement placées. » Dans la proposition 50, Euclide construit deux figures « semblables et semblablement placées » sans expliciter ce procédé qui renvoie, en fait, au livre VI des *Éléments* où sont traités les similitudes entre figures et leurs rapports de grandeur éventuels. La possibilité de la construction de deux figures semblables et semblablement placées fait l'objet de la dix-huitième proposition. Depuis une droite AB donnée (figure 5), on construit

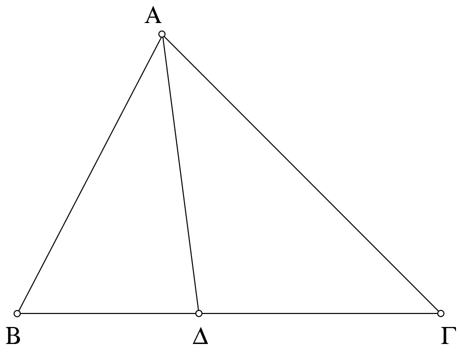



Fig. 5 – Proposition VI-18

l'un après l'autre des angles égaux en grandeur mais aussi en position, cette dernière permettant d'obtenir la bonne figure. D'une certaine manière, il s'agit de l'introduction d'une orientation pour les angles par laquelle on peut, par exemple, différencier deux triangles semblables. Dans la figure 6 les triangles ABC et DEF sont semblables et semblablement placés, par contre ABC et GHI sont semblables, mais ils ne sont pas semblablement placés. Par-delà son utilité pour les *Données*, cette orientation a un rôle plus profond qui apparaît lors de la démonstration de l'égalité de deux angles dans la proposition I-8 des *Éléments*.

> I-8 : Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et s'ils ont la base

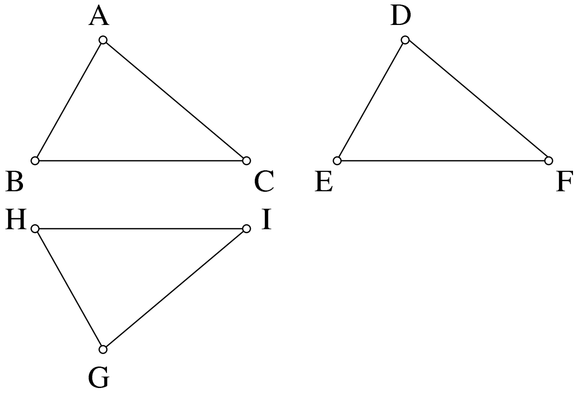



FIG. 6 – Figures semblables / semblablement placées

> égale à la base, les angles compris par les côtés égaux seront égaux[23].

Pour démontrer ce résultat, Euclide utilise le même principe de superposition que dans la proposition I-4. Il commence par appliquer le triangle ΑΒΓ sur le triangle ΔΕΖ et montre, ou plutôt constate, que les points et les côtés s'appliquent chacun à chacun. De même, l'angle ΒΑΓ s'applique sur l'angle ΕΔΖ, il lui est donc égal. Ce procédé ne peut fonctionner que si les triangles sont non seulement semblables, mais aussi semblablement placés. Pour cette raison, toutes les propositions faisant appel, plus ou moins directement, à la superposition des angles nécessitent une précision quant à la position de ceux-ci. Les principaux exemples dans les *Données* concernent les constructions de figures semblables et surtout la recherche des rapports entre elles. Pour ce dernier point, Euclide utilise la divisibilité de tout polygone en triangles donnés d'espèce, résultat qu'il a démontré dans la proposition 47.

[23][15], p. 8

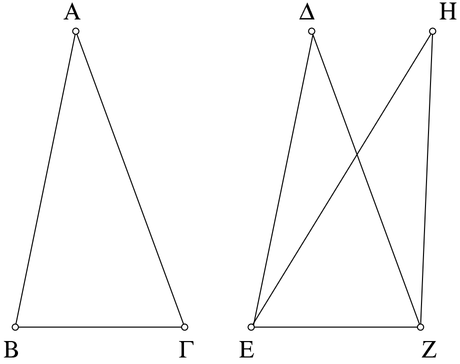



FIG. 7 – Proposition I-8

Malgré les précisions apportées par Euclide sur les moyens d'obtenir une donnée de position, la question de la nature de cette position reste en suspens. Euclide ne définit pas la position, pas plus qu'il n'a défini la grandeur et l'espèce. On pourrait, comme pour ces deux dernières, chercher quelques éléments de réponse dans la philosophie d'Aristote mais, selon D.Ross[24], la position en tant que catégorie aristotélicienne est tout à fait marginale. Elle n'apparaît qu'à un seul endroit et semble de fait rejetée des véritables catégories permettant de penser le monde. La notion de position, comme réponse à la question *où*, est en fait remplacée par la notion de lieu dont la géométrie va également hériter.

### *Sur le choix des trois caractères de la figure*

La lecture des *Données* permet de comprendre que la figure, définie par Euclide comme ce qui est compris par quelque(s) limite(s), se caractérise également par sa grandeur, sa forme et sa position. Il incombe alors au géomètre de choisir ce qu'il va étudier dans cet objet. Dès lors, deux

[24] [41], p. 29

grands domaines se dessinent : d'une part une géométrie qui se concentre sur la grandeur et la possibilité de sa mesure, et d'autre part une géométrie des formes et des positions.

## *Un choix historique : philosophie platonicienne et aristotélicienne*

Le choix de cette définition tripartite pour la figure repose sur deux raisons principales, l'une historique, en lien avec la pensée de l'époque, l'autre technique, fondée sur des nécessités mathématiques. Lorsqu'Euclide rédige les *Éléments*, deux théories philosophiques principales sont en présence pour expliquer ce dont parlent les mathématiques. La première est la théorie platonicienne des Idées[25]. Dans la philosophie de Platon, les Idées, aussi appelées Formes, sont des entités abstraites, immuables et situées dans un univers qui leur est propre. Les mathématiques se situent entre ce monde purement abstrait et le monde sensible. L'étude d'objets mathématiques permet dès lors aux hommes d'atteindre potentiellement les vérités immuables de ces idéalitées.

> Les mathématiciens se servent des figures visibles et raisonnent sur ces figures, quoique ce ne soit point à elles qu'ils pensent, mais à d'autres, plus parfaites, auxquelles celles-ci ressemblent ; ils raisonnent du carré en-soi, de la diagonale en-soi, non de la diagonale telle qu'ils la tracent, et il faut en dire autant du reste. Toutes ces figures qu'ils modèlent et dessinent, qui produisent des ombres et dont il y a des images dans le miroir de l'eau, ils les emploient à leur tour comme des images, cherchant à voir ces objets en-soi, supérieurs, qu'on ne saurait apercevoir autrement que par la pensée. *République* (510D)

[25] On pourra consulter M.Caveing, *Platon et les mathématiques*, in *Les philosophes et les mathématiques* [7], coordonné par E.Barbin et M.Caveing

Pour Platon, le géomètre travaille avec des figures qui lui permettent d'atteindre les propriétés des Formes. Ceci implique, du fait de la nature universelle que doivent avoir les résultats, que les objets mathématiques sont universels et donc uns, identiques et immuables[26]. Pour le philosophe, l'ordre des objets mathématiques fondamentaux débute par l'unité, puis viennent les nombres entiers et enfin les grandeurs géométriques. La géométrie « rend lumineuse la similitude de nombres qui ne sont pas semblables entre eux de nature, en utilisant la vocation propre des surfaces planes[27]. » Ce principe est étendu à la géométrie tridimensionnelle où peuvent être conçus des produits de trois facteurs formant ainsi des solides.

À propos de la position, l'un des trois caractères de la figure euclidienne, Platon offre peu de renseignements, car comme le rappelle le témoignage d'Aristote[28], il s'oppose à la doctrine pythagoricienne qui faisait du point « une unité dotée de position. » Platon ne rejette pas l'idée de position, mais il nie l'existence du point qu'il conçoit uniquement comme une convention géométrique. Un point sur une ligne n'est qu'une marque de position qui n'existe pas en-soi et qui n'influe pas sur la nature de ligne ; la ligne idéale restant une et insécable. Le point n'existe pas, pas plus que la ligne n'est constituée de points. Certes, la position peut être signifiée par un point, comme dans les *Données*, mais cela n'implique pas l'existence de cet objet. Concernant la forme, nous avons vu que la figure est le reflet d'une idéalité qui possède une forme. Dans sa philosophie, Platon associe un solide géométrique à chacun des éléments qui composent l'univers. Ainsi, la Terre, l'Eau, l'Air et le Feu sont associés respectivement au cube, à l'icosaèdre, à l'octaèdre et au tétraèdre. Un mys-

[26] Pour Platon l'âme de chacun a nécessairement, avant sa naissance, contemplé les essences idéales qui sont unes, identiques et immuables et que l'on perçoit ensuite par réminiscence.

[27] Platon, *Epinomis*, 990D-E

[28] Aristote, *Métaphysique*, 992a 20-22, [5] p.53

térieux éther est aussi pris en compte du fait de l'existence d'un cinquième polyèdre régulier : le dodécaèdre. Chez Platon, la forme n'est pas seulement le tracé fait par le géomètre, elle tend à rendre compte de la nature intime des choses. L'étude des formes ouvre ainsi sur une tentative d'accession au monde des Idées universelles et une recherche sur le monde physique. Dans le monde sensible, la variation possible entre le grand et le petit prend diverses formes comme le chaud et le froid, le plaisir et la douleur ou l'intensité des couleurs, ce qui constitue une représentation de l'un des principes fondamentaux de la philosophie platonicienne, à savoir le couple Grand / Petit. La réalisation mathématique de ce principe réside dans la possibilité d'extension, c'est-à-dire la Grandeur en-soi, conçue ici comme continue. À cette Grandeur, Platon ajoute ensuite les concepts de Limité et d'Illimité et il obtient finalement les grandeurs géométriques. Ces dernières s'organisent alors selon un ordre précis. Par une première limitation, se crée le solide limité par une surface elle-même limitée par la ligne. Platon ne va pas jusqu'au point car ce dernier n'a pas d'existence.

De l'ensemble des principes de la philosophie platonicienne résulte une conception de l'objet de la géométrie qui existe en-soi et qui possède à la fois une forme, une grandeur, et dans une moindre mesure une position.

### *Aristote et la géométrie*

Le point de vue de Platon sur la géométrie ne constitue pas la seule théorie en présence lors de la rédaction des *Éléments* et la manière de concevoir les objets de la géométrie comme des abstractions du monde sensible prend, chez Aristote, une tout autre forme. Élève de Platon, il s'oppose à son maître sur la nature des êtres mathématiques dont il rejette l'existence en-soi. Dans la *Métaphysique*[29], Aristote

[29] Voir l'analyse de la *Métaphysique* par D.Ross, *Aristote*, [41] p.217

cherche à répondre à deux questions essentielles : premièrement, il se demande si la métaphysique est possible en tant que seule science suprême, et deuxièmement s'il existe des substances non sensibles, et si oui lesquelles. Dans les *Catégories*, Aristote avait mis en place un certain nombre de catégories permettant de penser le monde. Dans la *Métaphysique*, il revient sur celle qu'il considère comme primordiale, à savoir la substance. La substance est « ce qui ne peut être affirmé d'un sujet, mais dont tout autre chose est affirmée » comme sa qualité, sa quantité ou son lieu. Le monde, selon Aristote, est hiérarchisé et ses membres les plus élevés sont les substances immatérielles. En dessous de celles-ci, se trouvent les choses sensibles pour lesquelles la forme se situe dans la matière. Dans le cas d'un objet sensible, la doctrine aristotélicienne explique qu'il peut varier selon quatre points de vue. Il peut être détruit, changer qualitativement, changer de taille ou se déplacer dans l'espace. De ces quatre possibilités, est déduite l'existence de quatre types de matières : la matière pour la venue à l'être et la disparition, la matière de l'altération, la matière pour le changement de dimension et la matière locale ou de la locomotion. Pour Aristote, tout ce qui existe est au moins constitué de matière locale et d'une forme. Poussant plus avant cette recherche, il montre que l'on peut trouver une autre matière qui, bien que n'existant jamais sans la matière sensible, peut en être distinguée. Cette nouvelle matière, dite intelligible, n'est rien d'autre que l'étendue spatiale obtenue par abstraction à partir des choses sensibles. Contrairement à Platon, Aristote ne prétend pas obtenir la forme pure car comme le souligne D.Ross[30] « une ligne droite, un plan, un solide particuliers se distinguent de la forme de la ligne droite, de la surface, du solide par le fait qu'ils sont incorporés dans une extension particulière. » Pour obtenir la forme pure, il faut donc éliminer la matière intelligible par une deuxième abstraction. À ce stade, il faut

[30] [41] p.235

noter que l'extension n'est pas le substrat des choses sensibles créées par les Formes, mais simplement l'étendue qui n'existe pas de manière indépendante ou séparée. Les objets de la géométrie sont donc produits à partir des entités physiques par abstraction de leurs qualités sensibles. On ne conserve que les limites dotées d'une certaine forme. Comme le dit Aristote « les propositions universelles des mathématiques ont pour objet, non des êtres séparés en dehors des grandeurs et des nombres, mais des grandeurs et des nombres considérés [...] en tant que possédant telle ou telle propriété définie[31]. » Donc, la géométrie traite de figures ayant une certaine grandeur mais aussi une certaine forme et une position car pour le géomètre « les corps, à leur tour, seront considérés en tant que surfaces seulement, ou en tant que longueurs seulement, ou en tant que divisibles, ou en tant qu'indivisibles mais occupant une position, ou enfin en tant qu'indivisibles seulement[32]. » Aristote affirme explicitement l'existence d'une position pour la figure. Ceci est possible car les figures, liées au monde sensible, en partagent un certain nombre de caractères dont en particulier celui d'être en un lieu.

## *La nécessité géométrique*

Si les conceptions de l'objet de la géométrie semblent doublement héritières des penseurs qui ont précédé Euclide, le géomètre aurait pourtant pu les modifier car les mathématiques ne sont pas la philosophie et réciproquement. De quoi parle Euclide dans les *Éléments* et dans les *Données* ? Dans ces traités, il ne s'agit pas de chercher d'éventuels liens entre les figures dans un espace abstrait, ni encore moins de les repérer dans ce même espace, mais d'étudier la figure pour elle-même. L'objet sur lequel le géomètre travaille est la figure. L'espace n'est pas présent dans la géométrie d'Euclide

[31] Aristote, *Métaphysique*, 1077b15-25, [5] p.205-206
[32] Aristote, *Métaphysique*, 1077b25-30, [5] p.206

et, par ce choix, le géomètre s'impose un certain nombre de limitations implicites. Du reste, pour la tâche qu'il doit accomplir, les notions d'angles et de distance qu'il se donne sont parfaitement suffisantes.

## *Grandeur, ou forme, ou position ?*

La caractérisation tripartite (grandeur, forme et position) produit-elle sans ambiguïté une figure unique et bien définie ? Une ligne n'ayant pas de forme précise peut sembler suffisante pour définir une figure et rendre inutiles les notions de forme et de position. Cependant, la détermination de la grandeur de cette figure utopique fait nécessairement intervenir une mesure ou une unité de mesure et impose l'idée de forme qui permet de définir une méthode de calcul de la longueur, de l'aire ou du volume. Une figure n'étant que grandeur ne peut donc pas exister dans cette géométrie. Les cas de la forme et de la position sont plus simples. En effet, en ne prenant que la forme le méthematicien définit des figures semblables qui, par définition, ne sont pas uniques. La forme ne saurait donc être suffisante. De même, que serait une figure faite de position ? Toute figure a une extension et relève forcément de la grandeur et de la forme par le simple fait qu'elle est limitée. Le seul cas possible est celui du point qui n'a pas d'étendue, mais qui a une position. Cependant, le point n'est pas une figure pour Euclide, car il est uniquement une limite. Par ailleurs, le géomètre ne conçoit pas ses figures avec les points vus comme positions, mais comme limites à l'image de ce qu'il a fait pour la ligne et la surface. Ainsi, la grandeur, la forme et la position, prises seules ne définissent pas une figure, il faut donc en choisir au moins deux pour obtenir un véritable objet.

Le cas « grandeur + position » ne saurait exister car la grandeur sans forme n'existe pas. Le couple « grandeur + forme » permet de caractériser les figures semblables, c'est-à-dire ayant la même forme, mais de plus avec une certaine grandeur. Ce type de considération existe dans les *Éléments* avec en particulier la proposition VI-25 où Euclide se propose de « construire une figure semblable à une figure rectiligne donnée et égale à une autre figure rectiligne donnée », la deuxième servant d'hypothèse de grandeur. Ce n'est pas l'obtention d'une figure unique que cherche le géomètre mais la possibilité de la construction. La figure est définie à une isométrie près comme dans la proposition VI-6 où les deux triangles ΔEZ et ΔHZ tout en étant égaux et semblables, ne sont pas identiques (figure 8). Reste le cas « forme + position ». Il concerne les figures semblables et semblablement placées qui ne sont, par définition, pas uniques. Une véritable figure ne semble pouvoir se concevoir qu'avec les notions de grandeur, de forme et de position réunies. Toutefois, deux exemples extrêmes viennent contrarier cette définition.

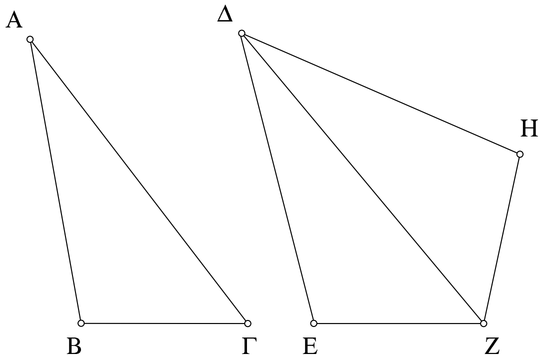



Fig. 8 – Proposition VI-6

### *Cas extrêmes de la définition tripartite*

Un premier cas particulier d'objet géométrique semblant sortir du cadre habituel est présent au sein même des *Éléments*. Il s'agit de l'angle droit. La première définition des figures les pose comme limitées par certains points, lignes, ou surfaces. Or, l'angle droit, qui a bien des limites, n'est pas à proprement parlé limité de tous côtés. Pourtant, il possède une certaine forme et une grandeur qu'il partage avec tous les angles droits comme l'impose la quatrième Demande[33] des *Éléments*. De plus, rien n'empêche de déterminer sa position et dès lors se voit-il doté de grandeur, forme et position sans toutefois être une figure telle que l'a définie Euclide. Ainsi, un objet autre que ceux déjà rencontrés se trouve doté des trois caractères que l'on pouvait penser propres aux seules figures. Le deuxième exemple est, en quelque sorte, le contraire du premier car il montre qu'un objet géométrique peut être dépourvu de l'un des trois caractères précédents. Pour trouver un tel objet, il est nécessaire de quitter Euclide pour plonger chez d'autres géomètres. L'un des problèmes géométriques les plus en pointe lors de la période hellénistique est la trisection de l'angle[34]. En effet, s'il est aisé de couper un angle en deux par sa bissectrice, sa trisection, dans le cas général, nécessite l'utilisation d'autres outils. Les Grecs durent donc faire preuve d'ingéniosité pour résoudre ce problème délicat. L'une des réponses utilise la quadratrice. Cette courbe dont, l'invention est attribuée à Hippias, se construit comme suit. Dans un carré ABCD (figure 9), on commence par décrire le quart-de-cercle BED. Ensuite on suppose que le rayon AB se déplace uniformément de AB en AD et que, pendant le même temps, la ligne BC vienne, tout en restant parallèle à elle-même en AD. On considère alors le point d'intersection

[33] « 4. Tous les angles droit sont égaux entre eux. », *Les oeuvres d'Euclide*, Trad. F.Peyrard, [15] p.2

[34] Voir le rappel qu'en fait T.Heath, *History of greek mathematics*, tome I, [21] p.235-244

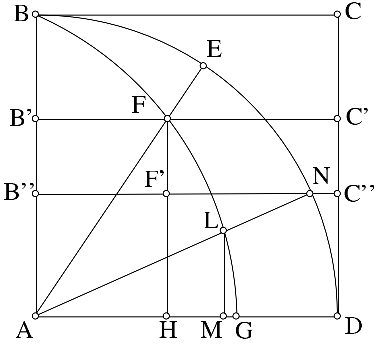



FIG. 9 – Quadratrice

(par exemple F, ou L sur la figure) du rayon et de la ligne en mouvement. On obtient une courbe dont la particularité est de fournir la relation suivante :

$$\text{angle(EAD)} : \text{angle(NAD)} = \text{arc END} : \text{arc ND}$$
$$= \text{FH} : \text{LM}.$$

De là, il est très facile de trisecter l'angle EAD car il suffit d'avoir le rapport FH : LM voulu. Cette courbe permet de répondre au problème de la trisection de l'angle, cependant pour la *figure* ABFLG dont l'une des lignes est la courbe en question, une difficulté apparaît. La quadratrice est une courbe transcendante dont la mesure ne peut se faire avec la notion de grandeur telle qu'elle existe chez les Grecs, c'est-à-dire comme rapport de nombres au mieux algébriques. De ce fait, une courbe dont la grandeur ne peut être déterminée délimite pourtant une certaine surface finie. Cette forme semble répondre aux critères des figures, pourtant il n'en est rien.

Les exemples de l'angle droit et de la quadratrice montrent que la définition de l'objet de la géométrie n'est pas encore parfaitement unifiée. Les notions de grandeur, de forme et de position rendent bien compte de la majorité des situations, mais la formalisation d'autres éléments, comme le mouvement, manquent encore pour que la géométrie se libère de l'intuition trop physique qu'elle a de son objet.

### *La spatialité : le lieu et le vide*

Dans la géométrie d'Euclide, l'existence des objets n'est pas prouvée et elle n'est pas non plus postulée, sauf pour le cercle et la droite[35]. Il en est de même pour l'espace dont l'existence n'est tout simplement pas évoquée par les géomètres. Sur ces questions, les justifications doivent être cherchées chez les philosophes. Les objets mathématiques sont extraits du monde sensible par abstraction, mais l'espace n'est jamais pensé en tant que tel, et les concepts philosophiques les plus proches que l'on puisse trouver pour rendre compte des propriétés spatiales sont le lieu et le vide. Les recherches des philosophes sur ces deux sujets sont en lien avec une volonté de décrire le monde sensible, de le penser au mieux et pour cette raison, ces chapitres apparaissent le plus souvent dans les ouvrages sur la physique. Le lieu et le vide sont deux thèmes de réflexion anciens. Les questionnements sur le vide remontent aux atomistes comme Démocrite qui posent un espace vide dans lequel se trouve une infinité d'atomes[36]. Postuler l'existence du vide n'est pas sans conséquence, ni sans difficulté, ce qui poussera Aristote à le rejeter de sa philosophie. Aristote propose le lieu comme concept clé de la réponse à la question *où*. Malgré ses efforts, les tenants du vide ne s'avoueront pas vaincus, mais il incombera à tout bon philosophe traitant de physique d'introduire un chapitre sur le lieu et donc de prendre parti dans cette discussion.

[35] Voir les définitions au livre I des *Éléments*.

[36] Voir M. Jammer, *Concepts of space*, [26] p.7-26

## *La notion de lieu chez Aristote*

L'existence du lieu est prouvée par Aristote par le fait que la place où se trouve un corps est aussi celle qu'un autre peut prendre, donc cette place doit être quelque chose de nature différente des corps qui l'occupent. Pour lui, le lieu doit être d'un type parmi quatre : la forme, l'intervalle entre les extrémités, la matière ou les extrémités elles-mêmes. Aristote, après une longue démonstration ne retiendra finalement que la dernière proposition. Ainsi, le lieu est la limite du corps contenant, c'est-à-dire la première limite immobile du contenant. Le lieu n'apparaît pas par lui-même, il est un produit de l'objet physique qu'il contient. Il n'y a pas d'objet sans lieu, ni de lieu sans objet. Il y a donc une relation biunivoque entre le lieu et l'objet physique.

## *Le rejet du vide par Aristote*

Concernant le vide, Aristote expose d'abord une erreur classique de ses défenseurs qui, selon lui, le confondent avec le lieu.

> En effet, ceux qui parlent du vide le posent comme une sorte de lieu et de vase, qui semble être plein quand il contient la masse dont il est le réceptacle, et vide lorsqu'il en est privé[37].

Pour Aristote, admettre le vide va plus loin que cette distinction entre le vide et le plein, car le Vide signifie qu'il n'y a rien, pas même de l'air. Tel est donc l'objet de la réflexion du philosophe qui montre trois choses : d'abord qu'il n'existe pas de vide séparé des corps, ensuite qu'il n'y a pas non plus de vide occupé par les corps, et enfin qu'il n'y a pas d'interstices vides dans les corps. Le premier point est prouvé selon Aristote par des raisons physiques, à savoir l'idée qu'un corps se déplace d'autant plus vite que le milieu est moins

[37] Aristote, *Physique*, IV-6, [6] p.164-166

dense. Donc dans le vide, le mouvement devrait se faire en un temps nul, ce qui est impossible. Le deuxième point est rejeté simplement par la volonté de ne pas multiplier inutilement les concepts. La masse étant pensée comme distincte des propriétés sensibles du corps, il n'y a pas de nécessité d'introduire en plus le vide. Enfin, dans la troisième thèse, le philosophe veux contrer ceux qui « estiment manifeste que le vide existe, à cause du rare et du dense[38]. » Pour Aristote, la matière est toujours une et elle possède *en puissance* tous ses états. Par exemple, l'eau peut devenir air sans ajout de matière supplémentaire. De même, l'air peut se dilater et se contracter, tout comme la matière sensible peut occuper plus ou moins d'espace. Ce changement est qualitatif, et ainsi il peut se faire « avec tous les degrés d'intensité possibles » comme cela est vrai pour toutes les choses physiques du fait de leur continuité. Aristote fait un rapprochement entre le vide et l'infini et D.Ross explique que :

> Il n'y a ni vide, ni infini en acte ; mais, de même que « la division n'aboutit jamais à une fin », de telle sorte que la ligne est divisible à l'infini, de même, nous pouvons toujours concevoir un corps moins dense qu'un autre corps donné, quel qu'il soit. La matière est continue à travers l'univers, mais il n'y a pas de limite à sa ténuité possible[39].

En rejetant ainsi le vide en acte, Aristote se dote d'une notion particulière d'espace, qui n'est pas un vide absolu et infini, mais une juxtaposition de lieux.

### *Contre Aristote : Philopon et le lieu*

Quelques siècles plus tard, Philopon se place contre Aristote et sa théorie du lieu. Il reprend, l'une après l'autre, les quatre possibilités pour le lieu décrites par son prédécesseur

[38] [6] p.174-178
[39] D.Ross, *Aristote*, [41] p.124-125

et en montre, mis à part pour l'extension tridimensionnelle, chaque fois l'incompatibilité avec une véritable définition du lieu. La conclusion à laquelle aboutit Philopon est la suivante :

> On peut voir suffisamment clairement d'après ces considérations que le lieu n'est pas la limite du contenant. C'est une certaine extension en trois dimensions, différente des corps qui peuvent venir en elle, incorporelle dans sa propre définition – dimensions seules, vides de tous corps (le vide et le lieu étant en réalité la même substance) – ceci peut être montré par l'élimination des alternatives. De là, si le lieu n'est ni la matière, ni la forme, ni la limite du contenant, il reste qu'elle est l'extension[40].

Cette position conceptuelle s'oppose radicalement aux thèses aristotéliciennes. En concevant le lieu comme une extension tridimensionnelle, le philosophe modifie ce qu'il considère comme essentiel dans le lieu. Désormais, ce ne sont plus les limites qui importent mais l'espace déterminé par celles-ci. Le lieu étant maintenant une extension, il se trouve doté d'une autre caractéristique, « il est aussi une mesure des choses en un lieu, et par conséquent égal à elles[41]. » Toutefois le lieu pour Philopon n'est pas une entité purement abstraite qui serait détachée du monde sensible.

> Bien sûr, je ne veux pas dire que cette extension soit toujours ou puisse être vide de tout corps. Pas du tout. Mais j'affirme qu'elle est quelque chose de différent, au-dessus et au-delà des corps qui viennent en elle, et vide de par sa propre définition, quoique jamais sans corps ; de la même manière nous affirmons que la matière est diffé-

[40] Philoponus, *Corollary on place*, III.(a), 567,30, [32] p.28
[41] 568,15, [32] p.29

> rente des formes, mais ne peut jamais être sans forme[42].

L'extension dont parle le philosophe est donc toujours celle d'un corps, qui peut changer ou non, car plusieurs corps peuvent entrer successivement en un même lieu, comme l'eau et l'air dans une jarre. Le lieu est une mesure physique en un certain sens, mais pas une mesure mathématique car elle n'est pas complètement indépendante de la matière. Comme le dit Philopon, « le lieu est quelque chose de solide, en entendant par solide étendu selon trois dimensions. » Il parle ici d'un solide géométrique dont la définition n'est pas remise en cause.

> Mais des corps divers viennent en lui [le lieu], maintenant celui-ci, maintenant celui-là, alors qu'il [le lieu] reste immobile comme un tout et ses parties (comme un tout car l'extension cosmique ne peut jamais bouger, et ses parties, car il est impossible pour une extension, qui est incorporel et vide par définition, de bouger)[43].

Par sa nature abstraite, le lieu n'est pas sujet au mouvement. Comme pour les limites aristotéliciennes, l'extension est immobile.

La conception des objets mathématiques de Philopon diffère peu de celle d'Aristote et finalement les fondements philosophiques de la géométrie sont assez stables. La science des figures peut donc exister.

## *Les figures comme objets*

Même si leurs définitions semblent parfois plus philosophiques que mathématiques, les figures n'en restent pas moins au centre des travaux des géomètres et de fait conti-

[42] 569,10, [32] p.29-30
[43] 569,15, [32] p.30

tuent l'unique moyen d'accès à une éventuelle notion d'espace.

### *Archimède : Des spirales*

*De la sphère et du cylindre*, *La mesure du cercle*, *Sur les conoïdes et sphéroïdes*, *La quadrature de la parabole*, ou encore *Des spirales*, une grande partie des traités d'Archimède est consacrée à la mesure de longueurs ou d'aires d'objets géométriques non polygonaux. Dans le traité *Des spirales*, il s'intéresse à une courbe de son invention, la spirale, dont il étudie les propriétés et qu'il utilise pour résoudre des problèmes classiques de quadrature et de rectification du cercle.

> Si une ligne droite est menée dans un plan et si, l'une de ses extrémités restant sur place, elle tourne avec une vitesse constante un nombre quelconque de fois pour reprendre la position d'où elle est partie ; si, de plus, pendant cette rotation de la ligne droite, un point se meut sur la droite avec une vitesse constante à partir de l'extrémité fixe, le point décrira une spirale dans le plan[44].

Cette définition[45] donnée, ainsi que six autres, Archimède passe à l'une des propriétés fondamentales de la spirale :

> Si à une spirale décrite en une seule révolution d'ordre quelconque, sont menées, de l'origine de la spirale, des droites en nombre quelconque faisant entre elles des angles égaux, ces droites se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur[46].

Pour démontrer cette proposition, Archimède utilise l'aspect cinématique de la courbe. Les grandeurs des droites se dépasseront d'une grandeur égale car les temps mis par les droites

---

[44] ARCHIMÈDE, *Des spirales*, Trad. C.Mugler, [4] p.31

[45] De nos jours, la spirale se décrit simplement par la proportionnalité du rayon vecteur à l'angle en coordonnées polaires, soit encore $\rho = a\Theta$.

[46] [4] p.32

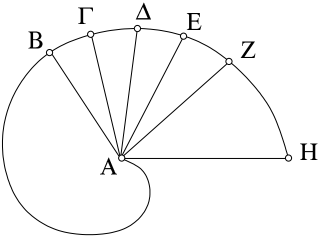



Fig. 10 – Proposition 12

pour passer d'une position à l'autre sont égaux. Le mobile sur la droite en rotation se sera déplacé d'une même longueur car le déplacement se fera durant un même temps. Le temps est alors un intermédiaire entre une position angulaire d'une droite et une autre. Ceci réapparaît dans la preuve de la proposition 14. Dans cette démonstration, ce n'est plus seulement une droite qui tourne mais il y correspond un point se déplaçant sur un cercle : « Il est en effet évident que, pendant que la droite AΘ tourne, le point Θ se déplace sur la circonférence ΘKH avec une vitesse constante... » Archimède utilise le temps pour ses démonstrations, ces dernières restent donc fortement liées à la définition cinématique de la spirale.

Dans la proposition 21, Archimède s'intéresse à l'aire de la spirale et met en place son encadrement par une figure inscrite et une autre circonscrite, et également la possibilité de rendre la différence des aires de ces deux figures aussi petite que l'on veut. La proposition 24 donne alors l'aire de la spirale :

> L'aire comprise entre la spirale décrite dans la première révolution et la première droite origine de la révolution est équivalente à la troisième partie du premier cercle[47].

[47] [4] p.54-56. En notations modernes : $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\rho^2 d\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} \theta^2 d\theta =$

Pour montrer ce résultat, Archimède procéde par un double raisonnement par l'absurde : il suppose d'abord que l'aire de la spirale est inférieure à celle du cercle de référence (ici, le tiers du premier cercle), « Qu'elle soit d'abord, si possible, inférieure », et démontre que c'est absurde. Ensuite, il suppose l'aire de la spirale supérieure, « Mais elle n'est pas non plus supérieure à ce cercle. Qu'elle le soit, si possible », et aboutit à nouveau à une contradiction. Donc, ne lui étant ni inférieure, ni supérieure, l'aire de la spirale est égale au tiers du premier cercle.

La proposition 18 est représentative du genre de problèmes auxquels s'intéressait Archimède et se place dans un courant que l'on pourrait qualifier de géométrie de la mesure. Cette proposition permet, par l'utilisation de la spirale, de construire une droite dont la longueur est égale au périmètre d'un cercle. Ce type de problème de rectification est intéressant car le cercle est une figure dont le périmètre et l'aire sont des grandeurs transcendantes.

> Proposition 18 : Si une droite est tangente à une spirale, décrite dans la première révolution, à l'extrémité de la spirale, et si du point qui est à l'origine de la spirale on élève la perpendiculaire sur l'origine de la révolution, cette perpendiculaire rencontrera la tangente, et le segment de cette perpendiculaire compris entre la tangente et l'origine de la spirale sera égal à la circonférence du premier cercle[48].

L'utilisation d'une courbe transcendante pour la résolution de problèmes géométriques est typique de la résolution de problèmes comme la trisection de l'angle, la quadrature du cercle ou encore la duplication du cube. À chacun de ces problèmes[49], correspond une courbe ou une famille de courbes :

---

$\frac{\pi a^2}{3}$ pour $\rho = \frac{a}{2\pi}\theta$

[48] [4] p.41

[49] Voir T.Heath, *A history of greek mathematics*, p.218-270

la conchoïde de Nicomède dans le premier cas, la quadratrice d'Hippias pour les deux premiers problèmes et enfin la cissoïde de Diocles pour le dernier. L'intervention du mouvement dans les courbes cinématiques permet de concevoir la continuité dans la géométrie par laquelle le géomètre peut atteindre des grandeurs transcendantes. Mais s'agit-il vraiment du géomètre ? Dans les cas d'Archimède, d'Hippias et des autres, le mouvement provient de l'intuition. Il n'y a pas de définition, ni même simplement de justification, du mouvement comme élément de la géométrie. Ainsi, bien que les courbes semblent prendre leur place au sein de la géométrie, leur caractère géométrique est un peu douteux. Elles se situent à mi-chemin entre les mathématiques et la cinématique, laissant une brèche dans la géométrie de la mesure.

### *Les Coniques d'Apollonius*

Après la grandeur, l'une des caractéristiques de la figure est sa forme. Par la forme, le géomètre peut définir des familles de figures comme les polygones, les polyèdres, la sphère, etc. pour ensuite chercher si telle ou telle autre figure est un carré, un tétraèdre, et ainsi de suite. L'utilisation de la définition ne constitue pas en soi une mise en relation et chercher si un triangle possède un angle droit par le théorème de Pythagore[50] demeure une étude intrinsèque de la figure. Pour qu'il y ait relation, il faut quitter la figure vue comme un tout et essayer de déterminer ce qu'il advient lorsque seule la forme est regardée. Existe-t-il une relation spéciale entre les figures qui, par-delà la simple définition, permette de distinguer une forme d'une autre, ou au contraire de l'identifier à elle ? Rien de ce genre ne se trouve dans les *Éléments*, ou dans les *Données*. Ces deux ouvrages reposent sur le principe, évoqué un peu plus haut, de détermination de la forme de la figure par sa définition, ou une

[50] EUCLIDE, *Éléments*, I-48

caractérisation interne à celle-ci. Un premier exemple d'une géométrie de la forme apparaît dans les *Coniques* d'Apollonius lorsque celui-ci montre l'existence de la section contraire dans un cône oblique.

Dans le premier livre des *Coniques*, Apollonius définit la surface conique, le cône, l'axe de ce dernier, ou encore son diamètre, etc.

> Si, d'un certain point, l'on mène à une circonférence de cercle, non située dans le même plan que ce point, une droite prolongée de part et d'autre, et si, le point restant fixe, la droite, circulant suivant la circonférence, reprend la position d'où elle a commencé de se mouvoir, j'appelle surface conique celle qui, décrite par la droite, est composée de deux surfaces opposées suivant le sommet, dont chacune croît vers l'infini, la droite génératrice étant elle-même prolongée vers l'infini. J'appelle sommet de cette surface le point fixe, et son axe la droite menée par le point et le centre du cercle[51].

Apollonius introduit un objet plus général que ceux des *Éléments*. Les définitions II et III précisent, parmi ces premiers objets, ce que sont les cônes (comme ceux d'Euclide, c'est-à-dire limités) et les cônes droits. Cette généralité est affirmée lorsqu'Apollonius insiste sur la nécessité de prendre en compte les deux morceaux de la surface conique. L'infinitude de l'objet et le fait que l'axe ne soit pas perpendiculaire au plan du cercle permettent dès le départ une étude très générale.

> Proposition 5 : Si un cône est coupé perpendiculairement à la base par un plan passant par l'axe, et s'il est coupé par un autre plan qui, perpendiculaire au triangle passant par l'axe, sépare, du côté du sommet, un triangle semblable

[51] Apollonius de Perges, *Coniques*, [3] p.3

au triangle passant par l'axe, mais placé en sens contraire, la section sera un cercle ; et nous appellerons une telle section la section de sens contraire[52].

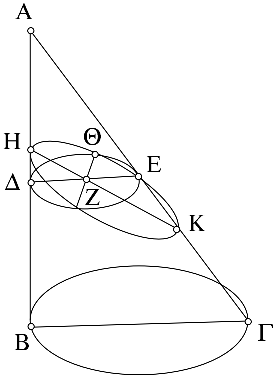



Fig. 11 – Proposition 5

Pour montrer l'existence de ce cercle (figure 11), Apollonius commence par construire les éléments nécessaires comme il les a précisés dans l'énoncé de la proposition. On considère le triangle ΑΒΓ passant par l'axe, puis le triangle AKH semblable en sens contraire qui détermine un certain plan produisant la section HΘK, dont il faut montrer qu'elle est un cercle. Pour cela, il commence par prendre un point « quelconque » Θ sur la section HΘK. Par ce point, il construit une section ΔE parallèle à la base, donc un cercle. De la similitude des triangles ΔZH et KZE on déduit HZ :ZΔ=EZ :ZK soit encore EZ×ZΔ=HZ×ZK. Or, dans le cercle ΔE, on a la relation $EZ\times Z\Delta = Z\Theta^2$, d'où $HZ\times ZK = Z\Theta^2$. Apollonius rappelle alors que le point Θ a été pris au hasard sur la section et que cette relation est vraie pour tous les points de HΘK. HΘK est donc un cercle. Dans cette preuve, d'une relation

[52] [3] p.9-10

ponctuelle et du choix arbitraire du point, Apollonius infère la validité du résultat pour toute la section. La vision de l'objet géométrique diffère de celle d'Euclide et la section par un plan devient un instrument d'étude. La nature géométrique de la section provient de deux choses : du cône comme figure géométrique et du plan conçu lui aussi comme géométrique. Le plan, en tant qu'espace de dimension deux, permet d'affirmer que la trace d'une figure par une section est un objet géométrique.

## *La quadratrice et la critique de Pappus*

Dans sa *Collection mathématique*, Pappus recense les résultats les plus remarquables connus à son époque. Dans cette *collection* de problèmes, l'exemple de la quadratrice est particulièrement intéressant car après avoir défini cette courbe dans le chapitre 30 du livre IV, Pappus met ensuite en doute son existence.

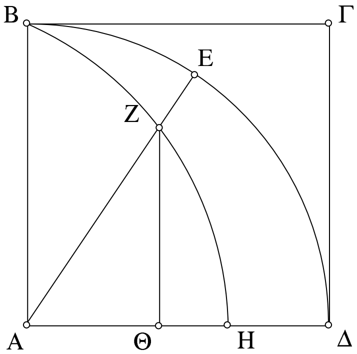



FIG. 12 – Quadratrice

> En effet, si deux points commencent à se mouvoir à partir du point B, comment pourront-ils se stabiliser en même temps, l'un au point A suivant une droite, l'autre au point Δ suivant un

> arc, sans connaître au préalable le rapport de la droite AB à l'arc BEΔ[53] ?

Par définition, la quadratrice nécessite deux droites se déplaçant simultanément et arrivant en même temps en un lieu donné. C'est cette dernière propriété qui est mise en doute par Pappus. Selon Pappus, Sporos, un autre géomètre, a aussi refusé cette existence « parce qu'on y assume d'abord comme hypothèse ce à quoi elle [la courbe] semble pouvoir être utilisée. » Pappus met en doute cette utilisation particulière du mouvement en géométrie. Il ne rejette pas le mouvement en soi, mais l'égalité de deux mouvements dont il conclut qu'elle arrive au mieux par hasard. De là, le géomètre poursuit son analyse et s'interroge sur l'existence du point extrême H. D'après la définition de la quadratrice, les points de la courbe sont déterminés par l'intersection de deux droites. Or à la fin du mouvement, ces deux droites se superposent. Pappus propose, sans toutefois l'accepter, « d'imaginer la ligne comme étant prolongée jusqu'à la droite AΔ de la manière dont nous établissons les lignes droites. » En un sens, il cherche à déterminer une limite. Mais on ne saurait aller si loin car, selon le géomètre, il faut se méfier d'une ligne « qui soit en quelque sorte trop mécanique. » Si Pappus est méfiant, il n'en rejette pas pour autant la courbe. La quadratrice est trop utile pour résoudre les problèmes de trisection d'angle et de quadrature du cercle pour qu'il l'exclût entièrement de la géométrie. Dans les propositions 28 et 29, il cherche donc d'autres preuves d'existence.

> Proposition 28. – La génération de la ligne est trop mécanique, comme nous l'avons dit ; mais elle peut cependant être analysée géométriquement comme suit, au moyen des lieux en surfaces[54].

[53]Pappus, *La collection mathématique*, [30] p.193
[54][30] p.197

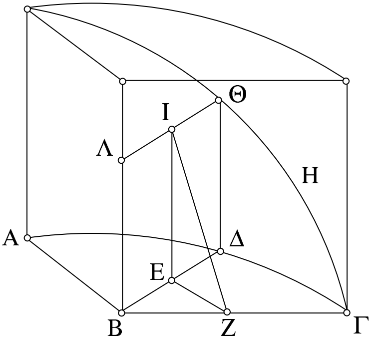



Fig. 13 – Quadratrice - Autre construction

Pappus veut traiter cette question à l'aide de lieux surfaces (figure 13), c'est-à-dire des lieux géométriques définis à partir de cylindres, cônes, sphères ou tout autres surfaces du second degré.

> Soit le quadrant de cercle ΑΒΓ donné de position ; menons transversalement une droite ΒΔ quelconque, et menons perpendiculairement sur la droite ΒΓ, la droite ΕΖ ayant un rapport donné avec l'arc ΔΓ, je dis que le point Ε est dans une ligne[55].

Pour la détermination du rapport entre la ligne et l'arc, donc dans la mise en évidence de la quadratrice, Pappus fait intervenir l'hélice, une courbe selon lui mieux connue. Dans le quart de cylindre ΑΔΓ, il construit l'hélice ΓΗΘ. Ceci fait, on considère la droite ΘΔ, génératrice du cylindre, et on construit les droites ΕΙ et ΒΛ perpendiculaires au plan de base. On mène enfin par le point Θ la droite ΘΛ parallèle à ΒΔ. D'après la définition de l'hélice, le rapport constant ΘΔ :arcΔΓ est connu. Comme par construction ΕΙ=ΘΔ on

[55] [30] p.197

connaît alors le rapport EI :arc$\Delta\Gamma$. On peut donc obtenir le rapport EZ :EI car le rapport EZ :arc$\Delta\Gamma$ est donné par hypothèse. On déduit ensuite facilement que la droite ZI, et donc le point I, est dans un plan coupant le cylindre. « Or, ce point est aussi dans une surface » précise Pappus en évoquant l'hélicoïde décrit par la droite $\Lambda\Theta$ en mouvement. Et « donc, le point I est dans une ligne » qui est la section de l'hélicoïde par le plan évoqué précédemment. Sur quoi Pappus conclut que « le point E est aussi dans une ligne » qui vérifie bien EZ :arc$\Delta\Gamma$=BA :arcA$\Delta\Gamma$, ce qui caractérise la quadratrice. Le point clé réside dans la manière dont est décrit le lieu du point E. Pour mettre en évidence la propriété caractéristique de la quadratrice, Pappus ne se contente pas de poser une ligne dont il étudie les propriétés, il la construit. Toutefois, la quadratrice est une courbe transcendante, qui ne peut être produite par la règle et le compas ; il faut donc faire intervenir autre chose. Ce que Pappus appelle un mouvement permettant de décrire la courbe est en fait une véritable relation entre plusieurs figures. Le point $\Theta$ décrit l'hélice et relève du mouvement dont parle Pappus. Ensuite, on obtient le point I, qui est dans une ligne que Pappus, sans vraiment le dire, projette orthogonalement sur le plan de base pour obtenir la quadratrice. La quadratrice est donc *mise en relation* avec une section d'hélicoïde par une projection intuitive qui réalise une relation de forme entre deux figures. Même si elle n'est pas mise en évidence en tant que telle, Pappus retient néanmoins le procédé qu'il applique dans une deuxième preuve[56] d'existence de la quadratrice à partir de la projection de l'intersection d'un cylindroïde ayant pour base une spirale d'Archimède et un cône. Malheureusement, il s'agit là des deux rares exemples d'une telle technique de preuve selon la forme.

[56] [30] p.199-201

## *Note sur les courbes transcendantes*

La spirale, la quadratrice et l'hélice sont des courbes transcendantes dont la spécificité est d'être produites par la composition de deux mouvements continus et non d'un seul. Cette distinction transparaît dès les commentaires de Pappus lorsqu'il s'interroge sur la possibilité de l'existence d'une telle courbe. La quadratrice ; qu'il considère comme « trop mécanique » ne semble pas pouvoir entrer dans ce qu'il conçoit comme géométrique. La différence est subtile car alors que le cercle est un objet géométrique, l'hélice ne l'est pas. Pour les courbes transcendantes, il est nécessaire d'utiliser deux mouvements, cependant, ceci n'explique pas pourquoi un mouvement est toléré et pas deux ou plus. Dès le départ, des doutes entourent le mouvement et son utilisation en géométrie. Dans les *Éléments*, Euclide cherche à éliminer le mouvement et, excepté dans quelques démonstrations et définitions comme celles des solides de révolution, il y parvient. Chaque fois que c'est possible, le géomètre donne une preuve ne faisant pas intervenir cette notion. Le mouvement dans les figures euclidiennes est toléré parce qu'il n'intervient à aucun moment dans l'utilisation de ces objets ou lors des preuves. Ressurgit ici la notion de forme. La géométrie grecque étudie les figures en tant que concepts, ou objets de science, mais pas comme de simples traces. Certes, d'une courbe mécanique, peut être abstraite ce qui semble être sa forme, mais pour qu'elle devienne objet de science, il faut que cette abstraction puisse être pensée dans le cadre de la géométrie. Dans une géométrie d'où le mouvement est banni, les courbes utilisant cette notion ne peuvent être acceptées. Ainsi, les quelques cas qui pourraient encore sembler paradoxaux comme les coniques ou les solides de révolution trouvent leur légitimité dans la possibilité de les définir par des relations métriques.

## *Sur les Lieux plans d'Apollonius*

Comme le rappelle Pappus, l'étude des lieux géométriques fait partie intégrante de la pratique des géomètres. Tous les grands auteurs ont consacré des ouvrages à ce type d'études et le livre VII de la *Collection mathématique* s'ouvre sur un inventaire des livres utiles au géomètre dont certains concernent explicitement le lieu. Il y a les deux livres des *Lieux plans* d'Apollonius, les deux livres des *Lieux à la surface* d'Euclide et les cinq livres des *Lieux solides* d'Aristée. Malheureusement, tous ces ouvrages sont perdus et seul le témoignage de Pappus nous renseigne sur leur contenu. Quelle est la définition du lieu en géométrie ? Le meilleur commentaire se trouve lorsque Pappus introduit, en en rappelant le contenu, les deux livres sur les lieux d'Apollonius. Dans ces ouvrages, Apollonius classe les lieux en trois genres. Les premiers lieux sont dits éphectiques ou *restreints*, et ils concernent les situations dans lesquelles « le point [est le] lieu d'un point, la ligne lieu d'une ligne, la surface lieu d'une surface et le solide lieu d'un solide. » Dans ce premier cas, il n'y a pas de mélange de genre et par exemple, le lieu d'un point, situé à l'intérieur d'un cercle et distant de la circonférence de celui-ci d'un rayon, est un point ; le centre du cercle en l'occurrence. En mélangeant des objets avec d'autres d'une dimension plus une par rapport aux premiers, Apollonius obtient les lieux dits diexodiques. Il s'agit de lieux tels que : « une ligne lieu d'un point et une surface lieu d'une ligne, un solide lieu d'une surface. » Comme le rappelle Ver Eecke dans ses notes[57], ce néologisme introduit par Tannery exprime ces lieux comme *progressants*, ou encore engendrés par le mouvement d'un objet géométrique (point, ligne ou surface). Par exemple, dans le plan, le lieu d'un point toujours situé à égale distance d'un point fixe est une ligne circulaire. En continuant ainsi la classification, Apollonius aboutit fina-

[57] [30] note 1-4 p.495

lement aux lieux anastrophiques, tels « qu'une surface lieu d'un point et un solide lieu de lignes. » Ce sont des lieux *enveloppants* dont un exemple est la sphère comme lieu d'un point toujours à égale distance du centre, ou encore un cylindre comme lieu d'une ligne, parallèle à un axe fixe et toujours à égale distance de celui-ci. À la suite de cette première classification, Pappus ajoute un commentaire visant à préciser les liens entre ces divers genres de lieux et la classification habituelle des problèmes géométriques en problèmes plans, surfaces, et grammiques (ou linéaires) selon que le géomètre utilise respectivement, les droites et les cercles, les sections coniques, et les courbes mécaniques.

> Parmi les lieux que l'on trouve dans le champ de l'analyse, ceux des données de position sont éphectiques, tandis que les lieux dits plans, solides et grammiques sont des lieux diexodiques de points, et que les lieux en surfaces sont anastrophiques de points et diexodiques de lignes[58].

Dans la première phrase, Pappus renvoie aux *Données* d'Euclide. Associer données de position et lieux éphectiques signifie que la position, dont la plus simple représentation est le point, peut être vue comme un lieu particulier, et donc comme une relation entre des objets de même genre. En ajoutant à ce premier cas statique le mouvement des points, Pappus obtient l'association des lieux plans, solides et grammiques aux lieux progressants de points. Le dernier cas renvoie à l'ouvrage perdu d'Euclide sur les *Lieux à la surface* qui concerne sans doute l'étude de surfaces comme les sphères, les cônes et les cylindres comme le laisse sous-entendre la citation de Pappus, mais peut-être aussi de surface de degré plus élevé. Le lieu géométrique met en relation des objets soit fixes, soit mobiles, mais il n'est pas cette relation. Le lieu est le résultat, donc la figure obtenue. Pappus établit alors une classification des lieux parallèle à celle des problèmes.

[58] [30] p.495

> D'une manière générale, les lieux sont appelés plans, ceux-là mêmes dont nous allons traiter, en tant qu'ils sont constitués par des lignes droites ou cercles, et ils sont solides en tant qu'ils sont constitués par des sections de cônes, c'est-à-dire par des paraboles, des ellipses ou des hyperboles. Enfin les lieux sont appelés grammiques en tant qu'ils sont constitués par des lignes qui ne sont ni des droites, ni des cercles, ni l'une des sections coniques que nous venons de dire[59].

Cette classification n'est pas neuve, mais elle s'avère éclairante lors de l'étude de problèmes.

Après ces quelques rappels et précisions, Pappus passe à la présentation proprement dite du contenu des deux livres des *Lieux plans*. Sans donner de résultat précis, il énumère les grandes familles de propositions s'y trouvant. En premier lieu, Pappus donne une proposition générale englobant tous les cas de lieux plans. Il donnera ensuite une série d'exemples de propositions d'autres géomètres qui s'y ramènent alors que ceux-ci ne semblaient pas l'avoir noté.

> Si d'un point donné, ou de deux, l'on mène deux droites ; si celles-ci constituent une seule droite, ou sont parallèles, ou comprennent un angle donné ; si elles ont entre elles un rapport, ou comprennent une aire donnée, et si l'extrémité de l'une de ces droites appartient à un lieu plan donné de positon, l'extrémité de l'autre droite appartiendra aussi à un lieu plan donné de position, du même genre que le premier ou d'un genre différent, et qui sera disposé semblablement au premier par rapport à la droite, ou disposé d'une manière opposée. Ces choses auront lieu d'ailleurs d'après les différences que présentent les hypothèses[60].

[59] [30] p.496
[60] [30] p.496-497

Les *Lieux plans* d'Apollonius semblent s'ouvrir sur la mise en place des transformations usuelles de la géométrie[61]. S'agit-il vraiment de transformations géométriques ? La distinction ne réside pas dans le résultat mathématique obtenu, mais dans la manière dont est vu l'objet mathématique. Il n'y a pas chez Apollonius la *transformation* d'une figure, mais uniquement le lien possible entre deux figures, ou lieux car seul le point se déplace sur chacune des courbes. Le géomètre ne considère pas un objet unique qui se translate, ou se dilate, mais deux, toujours distincts, dont il met en évidence les relations. Ainsi, même si l'autonomie d'un tel procédé est affirmée par sa présence au sein de la *Collection mathématique*, l'idée d'une transformation des figures n'est pas encore présente. Pappus poursuit le commentaire en donnant quelques propositions qui relèvent des premiers cas évoqués ci-dessus, mais qui ont été classées à tort par ses prédécesseurs comme des situations différentes.

> Si l'une des extrémités d'une droite donnée de grandeur est donnée, l'autre extrémité est liée à une circonférence concave donnée de position[62].

Cette proposition est une description du cercle qui va à l'encontre de celle d'Euclide. En effet, le cercle est ici défini comme le lieu décrit par un point et non comme une ligne ayant certaines propriétés. Ce principe apparaît encore dans les deux propositions qui suivent.

> Si, de deux points donnés, des droites se brisent en comprenant un angle donné, leur point commun est lié à une circonférence concave donnée de position.
> Si la base d'un triangle de surface donnée de grandeur est donnée de position et de grandeur, son sommet est lié à une droite donnée de posi-

[61]Voir l'analyse complète de cette proposition en Annexe
[62][30] p.497

tion[63].

La première proposition est le théorème de l'arc capable, quant à la seconde, elle rappelle la définition de l'aire d'un triangle par le produit de la base par la hauteur. Bien qu'élémentaires, ces propositions mettent en évidence l'importance du lien entre les objets, lien permettant de définir un lieu géométrique.

> Si une extrémité d'une droite donnée de grandeur et menée parallèlement à une droite donnée de position est liée à une droite donnée de position, l'autre extrémité est aussi donnée de position[64].

Cette proposition décrit une autre manière de concevoir les droites parallèles qui sont vues comme la trace d'un point se déplaçant à une distance donnée d'une droite tout en restant du même côté. Cette définition n'est pas anecdotique car elle sera reprise au Moyen-Âge dans le cadre de tentatives de démonstration du Postulat des parallèles. Au livre II des *Lieux plans*, Apollonius met en place des relations d'ordre supérieur.

> Si des droites menées de deux points se brisent, et si les carrés construits sur ces droites diffèrent d'une aire donnée, le point est lié à une droite donnée de position[65].

Ce que l'on peut traduire ainsi : prenons les droites $AM$ et $BM$ et posons $AM = a$ et $BM = b$. On suppose alors que $a^2 - b^2 = c$, où $c$ est une constante. On obtiendra une droite perpendiculaire à $AB$ en un certain point $I$ que l'on peut déterminer.

> D'autre part, si ces droites sont dans un rapport donné, le point sera lié soit à une droite, soit à une circonférence[66].

[63] [30] p.497
[64] [30] p.497
[65] [30] p.498
[66] [30] p.499

Cette fois, $\frac{a}{b} = c$ est connu. Si $\frac{a}{b} = 1$, on obtient la médiatrice du segment $AB$, donc une droite, et un cercle sinon.

Dans ces derniers exemples, et aussi dans l'ensemble des *Lieux plans*, la géométrie s'enrichit de la notion de lieu géométrique. Néanmoins, l'objet d'étude du géomètre n'est pas le lieu en lui-même mais les figures et les liens qui les unissent. L'étude des lieux est encore du temps de Pappus un outil d'analyse pour démontrer d'autres résultats et non un objet en soi.

## *Le lieu et la spatialité*

Pour les figures, le concept primordial est celui de limite, ou de frontière, qui détermine l'objet. Dans le cas du lieu géométrique, ce qui importe c'est d'être décrit par un *mouvement continu*. D'après la classification des lieux selon les trois genres, éphectiques, diexodiques et anastrophiques, ceci implique que, comme pour la figure, l'enveloppe détermine le lieu. Le lieu est donc ce qui est enveloppé par la ligne, ou la surface décrite. Figure et lieu se rejoignent sur la nature de leur définition ce qui n'est pas sans rappeler la notion aristotélicienne de lieu. La figure euclidienne est avant tout caractérisée par ses frontières, et de ce fait elle s'identifie pleinement au lieu d'Aristote. Avec la figure, le géomètre pense son objet selon un mode qui diffère peu d'un système philosophique sans doute très présent à son époque. Dans les *Lieux plans*, Apollonius classe les lieux selon trois espèces. Les premiers, du type un point lieu d'un point, ou une ligne lieu d'une ligne, n'engendrent pas de lieu enveloppe, mais simplement une identité d'objet. Avec les surfaces lieux de lignes ou de points et les solides lieux de surfaces ou de lignes, les deuxièmes et troisièmes espèces de lieux, réapparaît l'idée d'enveloppe de dimension $n-1$ ou $n-2$ permettant de définir un objet de dimension $n$. Lorsqu'un tel lieu est *décrit*, le mouvement mis en œuvre n'est pas formalisé ou défini ; il repose sur une certaine intuition d'un espace géométrique, non explicite, dont les propriétés sont semblables à celles de l'espace sensible.

Le lieu des géomètres est doublement proche de celui des philosophes. Non seulement sa définition comme enveloppe rejoint la pensée aristotélicienne, mais l'utilisation de notions proto-topologiques implique une notion de spatialité qui repose sur l'intuition de l'espace physique. Philopon a sa propre conception du lieu et du vide et, à très peu de frais, les géomètres auraient pu s'approcher de telles idées. Selon Apollonius, un lieu solide peut être conçu uniquement de trois manières : soit comme lieu éphectique d'un solide, soit comme lieu diexodique d'une surface, soit finalement comme lieu anastrophique d'une ligne. Il oublie alors un cas : celui d'un solide lieu *anastrophique* d'un point. Cette situation particulière imposerait au géomètre une autre manière de penser le solide qui serait non seulement enveloppé par sa frontière, mais qui comprendrait aussi tout ce qui se trouve défini par cette frontière. Apollonius n'évoque pas cette possibilité, mais elle sera exploitée par d'autres géomètres quelques siècles plus tard.

## *Les dimensions*

Les géomètres ne l'évoquent jamais, mais tous leurs objets sont nécessairement quelque part. Cette extension spatiale, parfois évoquée par les philosophes lorsqu'ils parlent du vide, ne peut être quelconque.

> 1. Un point est ce dont il n'y a aucune partie.
> 2. Une ligne est une longueur sans largeur.
> 3. Les limites d'une ligne sont des points.
> 5. Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur.
> 6. Les limites d'une surface sont des lignes.

> 1. Un solide est ce qui longueur, largeur et profondeur.

> 2. Un solide est terminé par une surface.[67].

À la lecture de ces premières définitions du livre I des *Éléments*, Proclus souligne[68] que, par leur ordre, se met en place une hiérarchie entre les différents objets. Partant du point, le géomètre passe à la ligne, puis à la surface en classant ainsi les objets non selon la perception, mais selon un ordre dans la construction de l'édifice mathématique. Les relations entre les différents objets mathématiques sont également précisées. Ils ne sont pas indépendants les uns des autres ; ils sont liés par une relation structurelle provenant du concept de limite, ou d'extrémité, qui produit un mouvement croissant des dimensions. Les points sans dimension limitent des lignes de dimension un, qui elles-mêmes limitent des surfaces de dimension deux, etc. jusqu'à l'obtention de solides tridimensionnels. Dès la définition XI-1 des *Éléments*, mais aussi dans toute la pratique, Euclide postule implicitement la tridimensionnalité. Par définition, le solide est ce qui a longueur, largeur et profondeur, c'est-à-dire ce qui est étendu de trois manières distinctes. Cette distinction des différentes grandeurs impose l'existence des trois dimensions. Les trois dimensions sont interchangeables, mais en aucun cas réductibles l'une à l'autre. Il y a donc une forme de nécessité dans l'existence de trois grandeurs pour caractériser un solide. Euclide ne dit pas que l'espace est seulement tridimensionnel, mais il l'utilise dans la proposition XI-3.

> XI-3. Si deux plans se coupent mutuellement, leur commune section est une ligne droite[69].

Pour démontrer ce résultat, Euclide procède par l'absurde en supposant qu'il existe deux droites d'intersection distinctes et d'extrémités communes. Ces deux droites devraient délimiter une surface, ce qui est absurde. La démonstration

[67] [15] p.1 et 396

[68] Proclus, *Commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide*, [33] p.77 et suivantes.

[69] [15] p.399

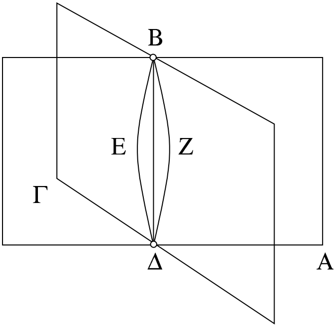



Fig. 14 – Proposition XI-3

s'appuie sur l'unicité de la droite joignant deux points. Ce résultat n'est pas prouvé dans les *Éléments*, par contre il se trouve dans les propositions 26 et 27 des *Données*. Le moment clé de la preuve se situe dès les premières phrases, lors de la mise en place des hypothèses de construction :

> Que les deux plans AB, BΓ se coupent mutuellement, et que leur commune section soit la ligne ΔB ; je dis que la ligne ΔB est une ligne droite[70].

Dès le début, Euclide considère que l'intersection des deux plans est une ligne (figure 14), donc un objet de dimension un. Il précise même qu'il existe au moins deux points sur cette ligne, les points B et Δ. En cela, Euclide formule ce qui sera compris bien plus tard comme un axiome. C'est particulièrement l'axiome I,7 des *Fondements de la Géométrie* d'Hilbert.

> (I,7) Si deux plans $\alpha$ et $\beta$ ont un point A commun, ils en ont encore au moins un autre B[71].

Cet axiome est capital, car c'est lui qui limite le nombre de dimensions à trois. Placé dans les hypothèses de la preuve

[70] [15] p.399
[71] D. Hilbert, *Les fondements de la géométrie*, [22] p.12

d'Euclide, ce résultat est intuitivement, mais pleinement, intégré dans sa manière de concevoir la géométrie ce qui implique que l'espace dans lequel se trouvent les objets géométriques possède trois et seulement trois dimensions.

### *L'infini*

Pour Aristote, l'infini n'existe que potentiellement, il n'y a pas d'infini en acte. Pour le philosophe, le monde est clos dans la sphère des étoiles fixes de sorte que l'infini reste toujours dans le fini, mais cela n'empêche en rien l'existence des mathématiques.

> Ce raisonnement ne supprime pas l'étude des mathématiciens, en niant que l'infini existe comme existant en acte dans le sens croissant, car il ne peut être parcouru ; en effet, ils n'ont pas besoin et ne font pas usage de l'infini, mais seulement d'une grandeur limitée aussi grande qu'ils le désirent, car pour la plus grande grandeur, la division est possible dans la même proportion que pour n'importe quelle autre grandeur[72].

Chez Euclide, l'infini apparaît à la Demande 2 du livre I concernant la possibilité de prolonger une droite indéfiniment. Ce postulat offre une forme d'infini pour l'espace géométrique. Il s'agit d'un infini potentiel, conforme à la pensée aristotélicienne. Les droites, dans le plan ou l'espace, peuvent être prolongées et devenir aussi grandes que l'on veut. La même notion apparaît dans la Définition 35 et la Demande 5 :

> 35. Les parallèles sont des droites, qui, étant situées dans un même plan, et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre.
>
> 5. Si une droite, tombant sur deux droites, fait

[72] Aristote, *Physique*, 207b27 [6] p.147

> les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits[73].

Conformément aux canons aristotéliciens, la droite se prolonge à l'infini, mais elle n'est pas infinie en acte. Lors de l'étude des propriétés spécifiques aux coniques, Apollonius reste dans le cadre de la méthode euclidienne et pour l'étude des asymptotes à l'hyperbole il utilise des droites prolongées indéfiniment.

> PROPOSITION XIV : Les asymptotes et la section, prolongées à l'infini, se rapprochent toujours davantage les unes de l'autre, et elles en arrivent à un intervalle moindre que tout intervalle donné[74].

Cette géométrie du fini qui approche l'infini comprend néanmoins deux coniques, la parabole et l'hyperbole, qui sont des objets infinis et qui doivent être conçus sans omettre ce caractère.

> PROPOSITION III : Il est manifeste qu'une ellipse ne peut être égale aux deux autres sections, parce qu'elle est limitée, tandis que ces dernières s'étendent à l'infini. Je dis, en outre, qu'aucune parabole ne peut être égale à une hyperbole[75].

La preuve de cette proposition ne concerne que la deuxième affirmation, celle qui traite de la différence de nature entre la parabole et l'hyperbole, mais la première partie de la proposition montre qu'Apollonius considère les sections de cône comme des objets entiers. Une parabole, ou une hyperbole, est conçue dans toute son infinité et par là, rend l'espace nécessairement infini.

[73] [15] p.2
[74] [3] p.130
[75] [3] p.484

La géométrie n'est pas une simple représentation du réel. Le monde physique et celui des mathématiques sont distincts et on ne peut inférer des propriétés de l'espace de la géométrie à partir de l'espace physique. Dans la Demande 2, par exemple, une droite peut être « prolongée indéfiniment, selon sa direction », et de fait elle possède deux sens. Néanmoins, les deux sens ne sont jamais différenciés et prolonger une droite dans un sens ou l'autre ne change en rien sa nature. Ce qui est valable pour les droites l'est aussi pour les plans. Ainsi, dans la Proposition I-12, Euclide utilise explicitement le fait qu'une droite partage le plan en deux. Dans cette proposition, qui concerne la construction d'une perpendiculaire passant par un point donné, Euclide évoque « l'autre côté de la droite AB. » Il ne semble pas exister de direction privilégiée dans l'espace de la géométrie et ce contrairement à l'espace d'Aristote qui est naturellement orienté et où chaque chose tend à se mouvoir vers son *lieu propre*. L'espace aristotélicien est une pluralité de lieux dans laquelle existent des directions fixes, en fait trois, auxquelles correspondent deux sens, soit six *dimensions* . Y a-t-il contradiction avec les *Éléments* ?

> Les objets mathématiques le montrent aussi : ils ne sont pas dans un lieu et pourtant, selon leur position par rapport à nous, ils ont une gauche et une droite, de sorte que leur position est seulement pensée, alors que par nature ils n'ont aucune de ces directions[76].

Pour Aristote, les objets des mathématiques sont sujets aux règles qui concernent les objets physiques seulement lorsqu'on les représente. Par nature, ils n'ont pas de direction privilégiée, ils sont comme détachés du monde physique. Aristote ne cherche pas à imposer l'anisotropie de l'espace sensible à la géométrie. Euclide emprunte également cette voie

[76] ARISTOTE, *Physique*, 208b24 [6] p.150

et, même s'il fait parfois appel à des considérations intuitives de directions dans l'espace, sans doute pour des raisons pédagogiques, il offre dans les *Éléments* une géométrie où ces orientations ne jouent pas un rôle central. L'espace de la géométrie, s'il existe, est isotrope et infini.

## *Le début d'une histoire*

À la fin de la période hellénistique l'espace est encore enveloppé dans les brumes de l'intuition. Sans l'affirmer directement, le géomètre travaille avec l'acceptation intuitive de l'espace dans lequel se trouvent les figures et où le continu, les dimensions, les notions topologiques élémentaires, etc. sont conçus avec un fort appel aux concepts sensibles. Dans une telle situation, le géomètre décide de s'appuyer sur la philosophie et lui laisse le soin de définir son objet. Néanmoins, les questions qui commencent à apparaître sur la nature des figures, des courbes, ou sur l'existence d'intersections ne vont cesser de hanter les géomètres des siècles à venir. Le corpus géométrique hellénistique constitue alors les fondements d'une réflexion sur la géométrie et sur son objet en général que des savants comme les Banū Mūsā, Ibrāhīm ibn Sinān, al-Ṭūsī, Ibn al-Haytham, et bien d'autres vont s'approprier et développer.

2

# La géométrie arabe entre le 9e et le 13e siècle

> Une proposition en géométrie n'est souvent rien qu'une autre vue sous un angle différent.
>
> Georg Christoph Lichtenberg

Dès son début, vers le 9e siècle, le Moyen-Âge voit naître un nouvel élan dans la recherche scientifique[77]. Héritiers du savoir grec, c'est désormais aux mathématiciens arabes de poursuivre cette quête incessante de connaissance. En ce qui concerne la géométrie[78], c'est un véritable nouvel essor qui débute avec la continuation de recherches déjà entamées ou ébauchées lors de la période hellénistique, et qui se poursuit par l'apparition de champs totalement nouveaux qui ne cesseront ensuite d'être actifs. Une telle vigueur dans la recherche scientifique ne peut laisser intacte une notion telle que l'espace en géométrie et celle-ci connait un développement, produit tant par une continuité dans le travail des géomètres que par l'élaboration de nouveaux concepts.

[77] Voir *Histoire des Sciences Arabes*, 3 tomes, dir. R.Rashed [1].
[78] [1] Tome II, *Mathématiques et Physique*.

### *Les transformations*

« À partir du 9e siècle, les mathématiciens ont, bien plus qu'auparavant, procédé par transformations géométriques[79]. » Évoquées par R.Rashed, ces transformations sont à la fois un lien entre les figures et une nouvelle méthode géométrique digne d'intérêt pour elle-même. Ce changement dans la définition de ce que doit être la géométrie constitue un pas important pour la notion d'espace car lorsque la figure, qui constituait l'objet central de la géométrie grecque, se met à se déplacer ou à se transformer, c'est toute la géométrie d'Euclide qui doit être retravaillée.

### *Les Banū Mūsā*

Dans les écrits des géomètres arabes, les exemples de transformations sont multiples. Les homothéties, les affinités, les similitudes ou encore les projections, toutes ces transformations agissent de manière différente sur les figures. Elles en modifient soit la grandeur, soit la forme, soit la position, soit plusieurs de ces caractères simultanément.

Dans la deuxième partie de la preuve de la proposition 3 de leur ouvrage sur le *Volume de la sphère et du cylindre*, les Banū Mūsā ont besoin de circonscrire un polygone à un cercle.

> – 3 – Soit un segment de droite et un cercle, si le segment est inférieur au périmètre du cercle, alors on peut inscrire dans le cercle un polygone dont la somme des côtés est plus grande que ce segment. Si ce segment est plus long que le périmètre du cercle, on peut circonscrire au cercle un polygone dont la somme des côtés est plus petite que ce segment[80].

[79] [38] Introduction

[80] R.Rashed, *Les mathématiques infinitésimales du 9e au 11e siècle*, vol. I, [35] p.67

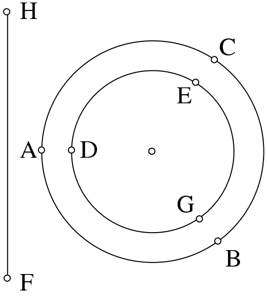



Fig. 15 – Proposition 3

La deuxième partie de la preuve est la suivante :

> Soit ensuite le cercle EDG et un segment HF plus long que son périmètre ; que le périmètre de ABC soit égal au segment HF. Si on inscrit dans le cercle ABC un polygone qui ne touche pas la circonférence EDG, alors la somme de ses cotés sera plus petite que le périmètre de ABC, c'est-à-dire que le segment HF[81].

Cette partie de la preuve réutilise la première partie de la proposition ; vient ensuite le moment où intervient une transformation.

> Si on circonscrit ensuite au cercle EDG un polygone qui le touche et qui est semblable au polygone mentionné, alors la somme de ses côtés sera beaucoup plus petite que le segment HF. Ce que nous voulions[82].

Il ne s'agit pas de construire un polygone dont on vérifie *a posteriori* qu'il convient, mais bien de le déduire du premier. Le polygone (figure 15), « semblable » au précédent, est l'image de ce dernier par une homothétie qui n'est pas

[81] [35] p.67
[82] [35] p.67

une simple relation entre deux figures, mais un moyen de produire une autre figure. L'utilisation de la transformation est, dans cet exemple, intégrée à la preuve. Elle intervient comme un principe ne nécessitant pas de démonstration, ou dont la démonstration est faite ailleurs.

### *Thābit ibn Qurra*

Dans son livre *Sur les sections du cylindre et sur sa surface latérale*, Thābit ibn Qurra utilise les transformations à la manière des Banū Mūsā mais il en isole en plus certains principes. Ainsi, dans la proposition 7, il montre comment une figure plane peut se projeter parallèlement à une droite sur un plan parallèle.

> – 7 – Si on a deux plans parallèles comprenant chacun une figure et si on joint par une droite un point de la circonférence ou du périmètre de l'une des deux figures à un autre point du périmètre de la seconde figure, de sorte que chaque droite menée d'un point du périmètre de la première figure parallèlement à la première droite menée tombe en un point du périmètre de la seconde figure, alors les deux figures sont semblables et égales[83].

La formulation de cette proposition reste dans les canons euclidiens dans le sens où elle décrit une relation entre deux figures données par hypothèse. Néanmoins, il s'agit bien d'une projection cylindrique dont Thābit ibn Qurra fait ici la première étude. Pour sa démonstration, Thābit ibn Qurra considère un point quelconque sur la première figure (figure 16), puis l'intersection de la deuxième figure avec la droite menée de ce point et parallèle à la direction donnée. Il en déduit alors que « si donc nous superposons la figure ABCD à la figure EFGH, si nous superposons le point A de celle-là au

[83] [35] p.518

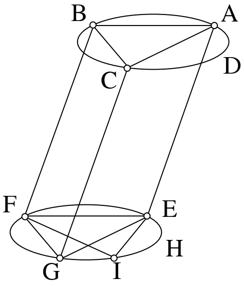



FIG. 16 – Proposition 7

point E de l'autre figure et si nous superposons la droite AB à la droite EF de sorte que le point B tombe sur le point F, alors le reste de la figure tombe sur le reste de l'autre figure et se superpose à elle. » S'ensuit un raisonnement par l'absurde pour justifier tout ceci. Dans cette proposition la figure est délimitée par une frontière qui lui donne sa forme et sa grandeur. La preuve fait également apparaître le problème des invariants et ce point est à souligner car l'utilisation des transformations comme méthode ne peut se faire sans une interrogation sur ce qui est conservé ou changé.

La recherche de la forme importe déjà lorsque celle-ci est conservée, mais elle devient indispensable lorsque la forme change. Sur ce deuxième aspect, la proposition 10 de Thābit ibn Qurra montre que la projection cylindrique d'un cercle est un cercle ou une ellipse.

> – 10 – Si on a un cercle dans un plan quelconque, si on mène de sa circonférence des droites jusqu'à un autre plan, et si chacune des droites menées est parallèle aux autres, alors elles tombent dans l'autre plan en des points par lesquels passe une seule ligne qui entoure une ellipse ou un cercle[84].

[84] [35] p.528

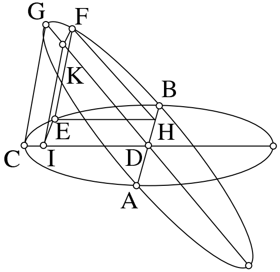



Fig. 17 – Proposition 10

Partant du cercle ABC, Thābit ibn Qurra commence par construire la projection dans le cas où le plan de projection passe par le centre du cercle ABC. Il démontre[85] que $k^2.FH^2 = HA.HB$ avec $\frac{EH}{FH} = \frac{DC}{DG} = k$, ce qui caractérise une ellipse ou un cercle d'après les *Coniques* d'Apollonius. Cette première partie de démonstration se termine par un argument qui n'est pas sans rappeler la proposition I-5 des *Coniques* dApollonius :

> De même, nous montrons également que toutes les droites menées de la circonférence du cercle ABC parallèlement à la droite EF tombent sur le périmètre de l'ellipse ou du cercle sur lequel est tombée la droite EF, soit AFGB[86].

Ayant obtenu une caractérisation, Thābit ibn Qurra peut conclure en invoquant l'aspect quelconque du choix des points projetés. Ceci n'est possible que parce que la forme obtenue est connue. Ce n'était pas le cas dans la proposition 7 où Thābit ibn Qurra a dû compléter sa démonstration par un raisonnement par l'absurde, montrant que toute la figure de départ se projette en une figure semblable et égale. Ce dernier

[85] Voir commentaire mathématique, R.Rashed, *Les mathématiques infinitésimales du 9e au 11e siècle*, vol. I [35] p.464

[86] [35] p.528

résultat est utilisé dans la fin de la proposition 10 pour passer d'un plan passant par le centre du cercle de départ à un plan quelconque. Il y a donc utilisation d'une projection, c'est-à-dire d'une transformation, dont Thābit ibn Qurra a isolé les principes et qui, au delà de ces démonstrations, prend sa place dans la géométrie tout entière.

## *Ibrāhīm ibn Sinān*

L'introduction des transformations comme outils géométriques continue à se développer après les travaux de Thābit ibn Qurra et dans son traité *Sur la mesure d'une portion de parabole*, Ibrāhīm ibn Sinān s'attache à réduire le nombre de lemmes nécessaires au calcul de l'aire d'une section de parabole. Le premier résultat général qu'il propose n'est autre qu'une transformation géométrique.

> – 1 – Si on a un polygone ABCDE et également un polygone GHIJK, si on mène les droites BL, CM, HN, IS parallèles à la droite DE et à la droite JK, telles que les rapports des droites AL, LM, ME sont suivant les rapports des droites GN, NS, SK et les rapports des droites BL, CM et DE sont suivant les rapports des droites HN, IS et JK, et si on joint AD et JG, alors le rapport du triangle ADE au triangle JKG est égale au rapport du polygone ABCDE au polygone GHIJK[87].

Ibrāhīm ibn Sinān définit une transformation générale dont il utilise les propriétés. Dans ce cas précis, cette dernière est donnée par les rapports entre deux polygones (soit une similitude, soit une composée d'affinités). Ibrāhīm ibn Sinān va dans le même sens que Thābit ibn Qurra, confirmant par là l'orientation prise par les mathématiques de l'époque. Elles ont recours de plus en plus aux transformations géométriques et avec ces dernières s'amorce un changement profond de

[87] [35] p.718

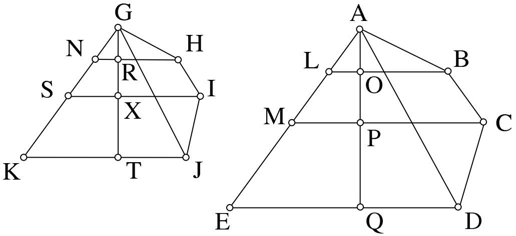



FIG. 18 – Proposition 1

l'objet de la géométrie. À l'aube du 11e siècle, les méthodes sont présentes, mais il reste à leur fournir un cadre théorique.

## *Objets et méthodes de la géométrie*

Dans *L'Analyse et la Synthèse*, Ibn al-Haytham expose sa propre théorie des mathématiques. Pour lui, par les démonstrations, les mathématiques permettent la « détermination… des inconnues[88] » et c'est aussi par elles que les mathématiciens prouvent la « vérité de leurs concepts. » L'organisation interne de la démonstration se fait selon le principe du syllogisme qui « est composé de prémisses dont l'entendement reconnaît la vérité et la validité, sans être troublé d'aucun doute à leur propos ; et d'un ordre et d'un arrangement tels de ces prémisses, qu'ils contraignent l'auditeur à être convaincu de leurs conséquences nécessaires et à croire à la validité de ce qui résulte de leur arrangement. » Ibn al-Haytham définit le principe de l'*analyse* comme la recherche de ces syllogismes. Une fois la suite logique trouvée, la *synthèse* permet de l'inverser et ainsi de clore la démonstration. Dans la pratique, la démonstration par analyse et synthèse se fait en deux étapes bien distinctes. Ibn al-Haytham explique

[88] R. RASHED, *Les mathématiques infinitésimales du 9e au 11e siècle*, vol. IV, [38] p.230

que « la façon de procéder dans l'analyse est de supposer le recherché tout à fait achevé et parfait, puis nous examinons les propriétés de son objet. » Cet examen se fait en produisant une chaîne de propriétés dont chacune est logiquement nécessaire par rapport à la précédente afin d'aboutir à « une chose donnée dans ce recherché, qui ne soit pas impossible en lui », c'est-à-dire une chose que « l'on ne peut rejeter, et que rien ne peut empêcher. » Cette étape terminée, le mathématicien peut passer à la synthèse qui « consiste à supposer la chose donnée, à laquelle a abouti l'analyse et à laquelle s'est arrêté celui qui examine, puis à lui ajouter la propriété trouvée, puis à lui ajouter la propriété trouvée avant cette dernière » et ainsi de suite jusqu'à l'objet recherché au départ. Par ce procédé, le mathématicien, non seulement, prouve les propriétés cherchées, mais aussi l'existence de l'objet et Ibn al-Haytham est le premier à présenter explicitement ce dernier aspect de la démonstration. Il montre ainsi que les mathématiques sont autant une recherche d'objets qu'une recherche sur les objets. Alors que dans la géométrie grecque tout semblait préexister sans que le géomètre n'ait à se soucier de l'existence, désormais, tout ce dont le mathématicien peut avoir besoin doit être prouvé. Comme le dit Ibn al-Haytham « l'art de l'analyse exige une connaissance préalable des principes des mathématiques et de leur exercice » à partir desquels se font les démonstrations. Toutefois, certaines situations sont trop complexes pour que l'analyse se fasse simplement et dans ce cas, par ce qu'Ibn al-Haytham nomme une « intuition », le mathématicien peut trouver la méthode qui lui donnera la démonstration à partir des premiers principes. Il ne s'agit pas de l'intuition au sens courant. Ibn al-Haytham suggère une méthode consistant à ajouter une propriété au recherché afin de se placer dans une situation où le principe de l'analyse peut s'appliquer. Comme il le souligne « ce qu'il [l'analyste] a besoin de saisir par l'intuition est un ajout, qu'il ajoute à l'objet, afin qu'il se produise, une fois ceci ajouté, des propriétés de l'objet qui conduisent, avec cet ajout, aux propriétés qui, une fois composées, ont pour résultat le recherché[89]. »

## *De L'Analyse et la Synthèse aux Connus*

L'analyse et la synthèse en tant que méthode théorique repose sur un certain nombre de prémisses dont la vérité est indubitable. Ces prémisses, Ibn al-Haytham les nomme les *connus*. Évoqués une première fois dans *L'Analyse et la Synthèse*, ils font l'objet d'un traité entier intitulé les *Connus* par lequel Ibn al-Haytham cherche à prolonger ce qui avait été entrepris par Euclide dans les *Données*.

> Nous disons ici : le connu, en termes généraux, est ce qui ne change pas, car toute chose qui change et qui a dans sa nature le changement, n'a pas de réalité déterminée, ni assignable[90].

Dans son sens le plus théorique le connu repose sur le *non-changement*. Ce qui ne change pas est propre à chaque type de connu et cette spécificité les différencie les uns des autres. Dans *L'Analyse et la Synthèse*, il existe cinq familles de connus : le connu en nombre, le connu en grandeur, le connu en rapport, le connu en position, le connu en forme. Quatre de ces connus rappellent la classification déjà établie par Euclide dans les *Données*. Ibn al-Haytham ne rejette pas son illustre prédécesseur, mais les notions de *connu* en grandeur, rapport, forme et position ne se réduisent pas à l'idée de *donnée* de grandeur, rapport, forme ou position. Le projet est plus vaste et, s'il reprend une terminologie semblable à Euclide, c'est pour fonder une théorie plus large dans laquelle s'inscrit celle présente dans les *Données*. La volonté de généralité apparaît aussi dans la présence d'un connu en nombre qui permet d'inclure la science des nombres à la méthode

[89] [38] p.234
[90] [38] p.248

générale, et ce contrairement à Euclide qui s'était limité à la géométrie.

## *L'essence des objets géométriques et les dimensions*

Dans les *Connus*, Ibn al-Haytham distingue deux grandes classes de connus, ceux qui concernent la quantité et ceux qui ne la concernent pas. Il limite son traité au premier type, qui inclut les mathématiques mais aussi des notions comme le poids, le temps et les lettres (voir tableau général en annexe). Contrairement aux *Éléments*, Ibn al-Haytham n'ouvre pas son exposé par ce qui concerne le point. Le premier objet géométrique est la ligne, suivi de la surface et du solide. Toutes ces notions premières sont précisées par des connus portant sur leur essence, extrémité, figure, grandeur, position, rapport et composition. Le caractère systématique des *Connus* met clairement en évidence la différence entre la nature profonde des entités géométriques et leurs éventuelles propriétés. De plus, en cherchant un « connu concernant l'essence » pour chaque objet géométrique, Ibn al-Haytham en assure l'existence.

> Le connu concernant l'essence de la ligne, c'est que la ligne est une longueur sans largeur, car cette notion est dans toutes les lignes et ne change dans aucune d'elles[91].
>
> Le connu concernant la surface, c'est que la surface est seulement une longueur et une largeur, car cette notion est dans toutes les surfaces et ne change dans aucune d'elles[92].
>
> Le connu concernant l'essence du solide, c'est qu'il a trois dimensions, car cette notion est dans tous les solides et ne change dans aucun d'eux[93].

[91] [38] p.456

[92] [38] p.470

[93] [38] p.480

Les deux premières définitions sont semblables à celles du livre I des *Éléments* d'Euclide à savoir deux objets, la ligne et la surface, dont les dimensions sont individuellement nommées. Dans la troisième définition, Ibn al-Haytham définit le solide directement par sa tridimensionnalité, rendant ainsi compte de l'équivalence de nature entre les trois dimensions. Pour un objet donné, la longueur n'est pas la largeur, mais sur le plan mathématique, ces notions sont les mêmes. Le traitement des dimensions par Ibn al-Haytham est abstrait et lors de sa présentation des différents types de grandeurs dans *L'Analyse et la Synthèse*, il insiste sur ce point.

> Les grandeurs se partagent en deux parties, naturelles et imaginaires. Les grandeurs naturelles sont les corps sensibles, leurs surfaces, leurs dimensions, qui sont leur longueur, leur largeur et leur profondeur. Les grandeurs imaginaires sont les dimensions abstraites par l'imagination à partir des grandeurs sensibles ; ce sont les dimensions que sont la droite, la surface, et le solide mathématique[94].

La théorie de l'abstraction à l'œuvre reprend celle des géomètres grecs, mais s'y ajoute l'affirmation de l'existence des grandeurs abstraites dans l'imagination qui n'est autre qu'un espace propre aux mathématiques et à leurs objets. L'essence commune des différentes dimensions évoquée plus haut transparaît encore davantage dans la suite de cette citation.

> Le connu en grandeur est celui dont la grandeur ne change pas ; mais la grandeur est la dimension ou les dimensions, donc le connu en grandeur est celui dont la dimension ou les dimensions ne changent pas, c'est-à-dire que sa dimension ou ses dimensions n'augmentent ni ne diminuent[95].

[94] [38] p.250
[95] [38] p.250

Sur le plan mathématique, la grandeur d'un objet n'est rien d'autre que sa dimension ou ses dimensions. L'idée de dimension a donc un double statut car elle rend compte à la fois de la grandeur d'un objet mais aussi, par le nombre, du niveau dimensionnel sur lequel il se place. Ibn al-Haytham ne rejette pas la définition traditionnelle du solide comme ayant longueur, largeur et profondeur, mais il met l'accent sur le nombre trois qui induit l'acceptation implicite de la tridimensionnalité de l'espace de la géométrie.

### *Le point : distance et mouvement*

Dans les *Connus*, la définition du point apparaît lorsque l'auteur s'intéresse à l'extrémité de la ligne. La notion d'extrémité constitue l'un des sept types de connus et se retrouve dans ce qui concerne la ligne, la surface et le solide.

> Le connu concernant l'extrémité de la ligne, qui est le point, se compose de deux notions : l'une se rapporte à son essence, c'est-à-dire qu'il n'est pas divisible, et l'autre à sa position, c'est-à-dire sa distance à un autre point ou à des autres points existant dans l'imagination, si cette distance ou ces distances ne changent pas[96].

Les termes employés dans cette définition donnent à celle-ci un aspect euclidien. Mais si Ibn al-Haytham reprend l'idée aristotélicienne du point comme indivisible, la suite du texte montre que la notion de position qu'il évoque dépasse celle des *Données*.

> Cette notion se partage en trois parties :
> L'une est que ce point, lui-même de position connue, est fixe, et que le point ou les points existant dans l'imagination sont également fixes et qu'aucun d'eux ne se meut par aucune sorte de mouvement ;

[96] [38] p.456

> L'autre partie est que le point existant dans l'imagination est fixe, tandis que le point de position connue est mobile autour du point fixe, d'un mouvement circulaire, et que la distance entre eux ne change pas ;
> Et la troisième partie est que le point de position connue est à une distance qui ne change pas d'un point existant dans l'imagination ou est à des distances qui ne changent pas des points existant dans l'imagination et tels que les deux points, ou tous les points, soient mobiles par un mouvement égal, tous ensemble, et que les distances qui sont entre le point de position connue et les points, ne changent pas[97].

La première partie de la définition renvoie aux *Données* d'Euclide. Ibn al-Haytham évoque la position dans un contexte où tout est fixé non seulement vis-à-vis du point de position connue mais aussi pour tous les autres points considérés. Cette situation est typiquement la situation euclidienne dans laquelle le géomètre se donne, une fois pour toutes, une figure dont il étudie les propriétés. Dans la deuxième partie, le point de position connue n'est plus fixe, il se déplace suivant un mouvement qui n'est pas quelconque. Ibn al-Haytham formalise et généralise les rotations que ses prédécesseurs avaient utilisées sur quelques cas particuliers. Dans la troisième partie de la définition tous les points, de positions connue ou imaginés, sont mobiles. Le point de position connue reste toujours à la même distance des points imaginés et, ainsi mu par un mouvement *égal*, il peut être connu par rapport à l'ensemble des points imaginés. Finalement, Ibn al-Haytham se dote de quelque chose d'assez proche de la notion de référentiel attaché au mouvement pour lequel l'important n'est pas le mouvement, qui est quelconque, mais les distances entre le point de position connue et les autres points. Avec l'in-

[97] [38] p.456

troduction du mouvement circulaire la position se libère de l'idée hellénistique de fixité encore présente dans *L'Analyse et la Synthèse*. Les *Connus* offrent ainsi une réelle nouveauté au sein même de la pensée d'Ibn al-Haytham.

## *La Forme et les Figures : le rôle de la distance*

Pour la forme des lignes, Ibn al-Haytham commence par donner l'idée générale qu'il illustre ensuite par les cas de la ligne droite, circulaire et quelconque.

> Le connu concernant la figure de la ligne, c'est la notion qui constitue l'essence de la ligne ; il est, dans la droite, ses deux extrémités, plus le fait d'être la plus courte distance.
> En effet, la ligne droite est la distance qui est entre ses deux extrémités, à condition que cette distance soit la plus courte distance entre ces extrémités ; ce qui constitue son essence, ce sont donc ses deux extrémités car ce sont ses deux extrémités qui limitent la distance qu'il y a entre elles. Si on exige en plus de la distance, le fait qu'elle soit la plus courte, cette distance sera la ligne droite[98].

Dans la pensée d'Ibn al-Haytham, l'idée de distance intervient à de nombreux moments et elle constitue en quelque sorte la clé de voûte de son système. Deux idées différentes se cachent derrière le mot *distance*. L'une d'elles est la distance comme ligne quelconque reliant deux points. Ibn al-Haytham évoque ceci lorsqu'il explique qu'il y a « une infinité de lignes de figures différentes entre deux points, dont chacune est appelée distance, et on ne peut imaginer aucune d'elle en imaginant seulement ses deux extrémités. » De même, « la ligne circulaire est également la distance entre ses deux extrémités si c'est un arc [...] il peut y avoir entre ses deux extrémités

[98] [38] p.458

de nombreuses lignes circulaires de grandeurs différentes[99]. » Face à cette multitude de *distances* se pose le problème de définir *la* distance entre deux points, c'est-à-dire celle qui, dans un second sens, permettra une mesure de grandeur.

> La ligne droite [...] est la plus courte ligne qui joint deux points. Mais puisque la forme de la linéarité est établie dans l'imagination, que la figure de la linéarité ne diffère pas d'une droite à l'autre et qu'elle ne change pas, la droite de grandeur connue est donc celle pour laquelle la plus courte distance de ses deux extrémités ne change pas[100].

La solution réside dans l'intervention de l'*imagination* comme espace abstrait dans lequel on raisonne. La distance entre deux points imaginés est la ligne qui réalise la figure de la linéarité dans l'imagination, c'est-à-dire une droite imaginée. Cette droite imaginée existe car elle repose sur la linéarité qui est établie dans l'imagination. Par cette dernière expression, Ibn al-Haytham ne fait rien d'autre que doter sa géométrie d'un axiome d'existence d'une distance. Ceci fait, il peut associer la droite tracée entre deux points et la distance qui les sépare. Lorsqu'Ibn al-Haytham passe à la définition du connu de forme pour les lignes autres que la droite, il se réfère à l'idée de distance qu'il vient d'établir.

> Quant aux lignes courbes pouvant être de figure connue, ce sont celles qui ont un arrangement, un ordre et une notion qui constituent leur essence et qui ne changent dans aucune ligne de leurs espèces. La notion connue de la ligne courbe concernant la figure est la notion qui constitue son essence[101].

[99] [38] p.458
[100] [38] p.458
[101] [38] p.458

Pour Ibn al-Haytham, il ne s'agit pas de définir une courbe comme simple frontière d'une surface, mais bien de déterminer les conditions mathématiques de son existence. L'approche est la même pour les surfaces[102] et les solides de formes connues. Ibn al-Haytham ouvre le concept de forme à tout ce que l'on peut décrire mathématiquement, et en particulier à ce qui est courbe.

### *Le mouvement*

L'intervention du mouvement dans la géométrie n'est pas un fait isolé et les développements des transformations en géométrie au début du Moyen-Âge ont poussé les géomètres à s'intéresser à cette notion. Comme Euclide dans les *Éléments*, Thābit ibn Qurra, dans son traité *Sur la mesure des paraboloïdes*, reprend l'idée de rotation pour engendrer les solides de révolution. Cherchant la plus grande généralité, il définit plusieurs espèces et sous-espèces de paraboloïdes de révolution.

> Les figures solides que j'appelle paraboloïdes sont de deux sortes : l'une s'obtient par la rotation d'un segment de parabole autour d'une droite, j'appelle cette sorte le paraboloïde de révolution ; l'autre s'obtient par la rotation d'une droite sur le pourtour d'un segment de parabole[103].

La prise en compte de solides engendrés par la rotation d'une portion quelconque de parabole et non uniquement autour d'un diamètre permet à Thābit ibn Qurra d'obtenir des so-

[102] « Quant aux surfaces convexes ou concaves non sphériques, qui peuvent être de figure connue, ce sont celles qui ont un arrangement, un ordre et une notion qui constituent leur essence et qui ne changent dans aucune de leurs espèces. La notion connue de la surface convexe ou concave non sphérique qui concerne sa figure est la notion qui constitue son essence. La surface de forme connue est donc celle dont la notion qui constitue sa figure est connue. »

[103] [35] p.320

lides aux formes variées comme la coupole à sommet pointu, la coupole à sommet enfoncé, la sphère parabolique semblable à un melon ou encore semblable à un œuf. Thābit ibn Qurra ne se restreint d'ailleurs pas aux seuls cas où l'axe de rotation appartient à la figure, il donne aussi les définitions des tores à section triangulaire et carrée. Certaines figures sont nouvelles, mais le procédé reste identique à celui employé par les géomètres grecs, à savoir une rotation intuitive d'une figure autour d'une droite. Pour la deuxième sorte de paraboloïde, il ne s'agit pas d'un mouvement de révolution autour d'un axe, mais du mouvement d'une droite le long de la courbe. Thābit ibn Qurra ne fait pas intervenir d'objet de la deuxième sorte dans son traité et pour préciser davantage cette définition il faut la comparer à celle du cylindre usuel donnée dans son livre *Sur les sections du cylindre et sur sa surface latérale*.

> Si on a deux cercles égaux dans deux plans parallèles, si on joint leurs deux centres par une droite et leurs deux circonférences par une autre droite – ces deux droites étant dans un même plan –, si on fixe les deux cercles et la droite qui joint les deux centres et si on fait tourner la seconde droite sur les circonférences des cercles à partir de l'une des positions sur celles-ci jusqu'à ce qu'elle revienne à la position initiale – en étant pendant toute sa rotation, elle et la droite qui joint les deux centres, toutes les deux dans un même plan –, alors le solide limité par cette droite et les deux cercles parallèles est appelé cylindre[104].

Thābit ibn Qurra considère tout d'abord deux cercles égaux et placés dans deux plans parallèles. Le cylindre n'est donc pas engendré par la seule rotation d'une droite sur la circonférence d'un cercle. Pour être bien défini, le mouvement de la droite est précisé par le mouvement de ses deux extrémités.

[104] [35] p.502

Sans intervention de la distance, tout repose sur la relation qui unit les deux extrémités du cylindre, à savoir l'égalité. Cette idée est encore plus développée chez Ibn al-Samḥ lorsqu'il définit le cylindre. Ibn al-Samḥ, un contemporain[105] d'Ibn al-Haytham, reprend dans son texte les résultats d'al-Ḥasan, le cadet des Banū Mūsā. Dans son ouvrage *Sur le cylindre et sur ses sections planes*, Ibn al-Samḥ commence par se doter d'une nouvelle définition, plus générale, des objets présents chez Euclide. Après cela, il étend son résultat à des cylindres à bases quelconques dont on aura montré qu'elles sont de positions semblables.

> <2> La définition générale, en dehors de la précédente, est la suivante : soient deux figures rondes, d'un contour quelconque, situées dans deux plans parallèles ; que l'on détermine leurs centres, et qu'ils soient joints par une droite. On fait tourner une droite autour des deux figures, parallèlement à l'axe, lequel relie leurs centres, jusqu'à la faire revenir à sa position initiale. Ce que décrit cette droite parallle à l'axe est le cylindre. Cette définition inclut toutes les espèces du cylindre étudiées dans les livres des Anciens, ainsi que leurs propriétés. Si l'axe est incliné sur les deux bases, alors le cylindre est oblique[106].

Cette définition met en évidence l'importance des centres et de l'axe de la rotation. Comme chez Thābit ibn Qurra, la rotation dont il est question est à comprendre comme le parcours autour de quelque chose. Pour Ibn al-Samḥ, un cylindre peut avoir pour base aussi bien un cercle qu'une ellipse et dans ce dernier cas, le mouvement de la droite qui engendre le cylindre n'est pas en premier lieu circulaire. Tant chez Thābit ibn Qurra que chez Ibn al-Samḥ, c'est-à-dire dans le texte d'al-Ḥasan Banū Mūsā, le mouvement dit de rota-

[105] [35] p.885
[106] [35] p.931

tion est très général et concerne tout mouvement se faisant autour de quelque chose.

Plus rarement exprimée par les géomètres, l'idée de translation apparaît toutefois de manière implicite dans certains travaux, comme pour le cas de la définition du cylindre général chez Ibn al-Samḥ. Thābit ibn Qurra, dans le cadre de ses recherches sur le postulat des parallèles, introduit explicitement le mouvement de translation. Clairement expliqué par B.A.Rosenfeld et A.P.Youschkevitch, « dans son second ouvrage[107], Thabit b. Qurra part d'une hypothèse toute différente. Considérant un « mouvement simple », c'est-à-dire un mouvement de translation uniforme le long d'une certaine ligne droite d'un certain corps (par exemple, d'un segment droit perpendiculaire à la droite), il suppose que tous les points du corps (du segment) décrivent des lignes droites. Il en déduit l'existence de lignes droites équidistantes[108]. » Ce glissement ouvre de nouveaux champs d'investigation aux géomètres, et l'introduction du mouvement parmi les prémisses de la géométrie par Ibn al-Haytham devient alors fondamental.

Les *Connus* forment un ensemble dont le but avoué est d'introduire le mouvement en géométrie et Ibn al-Haytham précise que ceci est possible uniquement lorsque « l'objet repéré se meut d'un même mouvement que celui de l'objet mobile, et dans la direction de son mouvement[109]. » Toute la démarche repose sur cette possibilité de définir une égalité pour les mouvements. Dans la onzième proposition des *Connus*, Ibn al-Haytham exprime le lien existant entre deux cercles égaux de positions différentes et, dans la douzième, il translate véritablement un cercle.

– 11 – Si on mène entre deux cercles égaux une

[107] Thābit ibn Qurra, *Livre montrant que deux lignes tracées faisant des angles inférieurs à deux angles droits se coupent.*

[108] [1], vol.II, p.137

[109] [38] p.474

droite parallèle à celle qui joint les centres de ces deux cercles, de sorte que ses extrémités soient dans deux directions semblables, alors cette droite est égale à la droite qui est entre les deux centres[110].

Soient les deux cercles AB et CD dont les centres sont E et G ; on joint EG et on mène la droite BC paralèlle à la droite EG.
Joignons les deux droites EB et GC, elles seront égales ; élevons les deux perpendiculaires EI et GH, elles seront égales et parallèles. Mais les deux droites EB et GC sont égales et sont dans deux directions semblables par rapport aux deux perpendiculaires EI et GH ; elles sont donc parallèles car les deux triangles BEI et CGH sont égaux, donc l'angle EBI est égal à l'angle GCH, et la droite BI sera égale à la droite CH ; IC est commun, donc la droite BC est égale à la droite IH ; mais la droite IH est égale à la droite EG, donc la droite BC est égale à la droite EG. Ce qu'il fallait démonter.

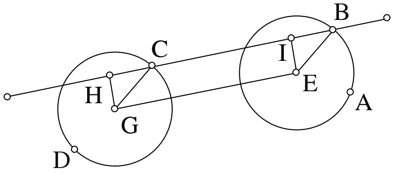



Fig. 19 – Proposition 11

Partant de deux cercles égaux (figure 19), Ibn al-Haytham n'a plus qu'à établir la relation qui existe entre eux. Il n'y a pas d'intervention du mouvement car tout le raisonnement

[110][38] p.510

se fait avec deux figures préalablement données. Le lien que met en évidence le géomètre est la constante EG qui correspond au vecteur de la translation. Ibn al-Haytham étend ce résultat dans la proposition 12 pour pouvoir translater le cercle.

> – 12 – Si on mène entre deux cercles égaux de grandeur et de position connues une droite parallèle à la droite qui joint leurs centres ; si ensuite on la prolonge dans l'une des deux directions et si on pose son rapport à la partie prolongée, un rapport connu, alors l'autre extrémité de la seconde droite est sur la circonférence d'un cercle de position connue[111].
>
> Soient deux cercles AB et CD égaux, de grandeur et de position connues, et leurs centres E et G : on joint EG, on mène la droite AC parallèle à la droite EG et on la prolonge jusqu'à I, de sorte que le rapport de AC à CI soit un rapport connu.
> Prolongeons la droite EG et posons le rapport de EG à GH égal au rapport connu de AC à CI. La droite GH sera donc de grandeur connue car la droite EG est de grandeur connue, d'après ce qu'on a montré dans les prémisses. Or le point G est connu, donc le point H est connu. Joignons HI et GC. Puisque AC est parallèle à la droite EG et qu'elle lui est égale, et puisque le rapport de AC à CI est égal au rapport de EG à GH, la droite CI est égale à la droite GH et lui est parallèle, donc la droite HI est égale à la droite GC et lui est parallèle. Mais la droite GC est de grandeur connue, donc la droite IH est de grandeur connue et le point H est connu. Faisons de H un centre et

[111] [38] p.510

traçons avec la distance HI le cercle IH, il sera de grandeur et de position connues, donc le point I sera sur la circonférence d'un cercle de grandeur et de position connues, soit le cercle IK. Ce qu'il fallait démontrer.

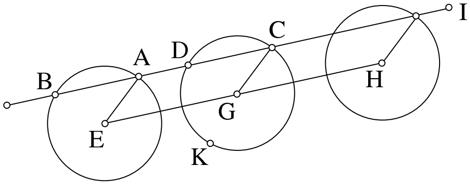



Fig. 20 – Proposition 12

Par l'intervention d'un rapport, la relation qui unit les deux premiers cercles AB et CD, se transporte (figure 20) en une même relation entre le cercle trouvé et l'un des deux cercles AB ou CD. Compte tenu du rôle clé du mouvement d'un point décrivant un cercle, ce qu'Ibn al-Haytham met en relation n'est pas la figure circulaire mais le mouvement permettant d'engendrer le cercle. L'idée d'une mise en relation, non pas de deux figures, mais de deux mouvements apparaît clairement dans cette proposition 12. La droite qui relie les centres des cercles joue le rôle de la *distance* qui permet d'égaler les deux mouvements simples et donc d'obtenir le cercle translaté.

## *Une nouvelle théorie du lieu*

Face aux changements dans la manière de penser les objets de la géométrie, le besoin de redéfinir le *lieu* se fait de plus en plus pressant. C'est ce travail qu'entreprend Ibn al-Haytham dans son traité *Sur le Lieu* où il ne cherche pas à faire œuvre de philosophe, mais bien de mathématicien.

Pour Ibn al-Haytham, il ne s'agit pas de remettre en question l'existence du lieu qui renvoie à l'idée simple consistant à affirmer que toute chose se trouve nécessairement quelque part. Comme il le dit lui-même, « le lieu, c'est la réponse que l'on fait à celui qui s'enquiert de la place d'un corps. »

> Un seul point peut demeurer objet de désaccord, c'est le lieu du corps dont les distances n'excèdent pas les distances de ce corps : c'est la notion qu'il nous faut chercher[112].

L'objectif est de définir le lieu d'un corps dans toute son individualité et à cette fin, Ibn al-Haytham remanie deux opinions philosophiques largement diffusées à son époque au sujet du lieu. La première est la théorie du *lieu-enveloppe* d'Aristote et la seconde est celle du *vide* de Philopon. Pour Ibn al-Haytham, toutes deux sont insatisfaisantes car elles ne définissent en rien le lieu d'un corps.

> Nous disons : pour tout corps, il y deux choses qui peuvent être appelées lieu.
> L'une est la surface enveloppant le corps, c'est-à-dire la surface de l'air enveloppant le corps qui est dans l'air, la surface de l'eau enveloppant le corps qui est dans l'eau et la surface de tout corps à l'intérieur duquel il y a un corps qui en est distinct. C'est pour cela qu'a opté l'un des deux groupes en désaccord.
> L'autre notion est le vide, imaginé rempli par le corps. Si en effet un corps se déplace de la position dans laquelle il se trouve, la surface enveloppante dans laquelle il s'est trouvé peut être imaginée vide, sans corps dedans, même si elle a été remplie d'air ou d'eau, ou d'un corps différent de celui qui était dedans. Par position j'entends l'un des lieux précédemment mentionnés, dont

[112] [38] p.668

chacun est appelé par convention lieu.

> Le vide imaginé, ce sont les distances imaginées, sans matière dedans, entre les points opposés appartenant à la surface enveloppant le vide. Cest pour cela qu'a opté l'autre groupe[113].

Pour faire apparaître des contradictions, Ibn al-Haytham utilise des situations géométriques, domaine qu'il maîtrise particulièrement. Contre les thèses aristotéliciennes, Ibn al-Haytham donne plusieurs exemples qui visent tous à montrer que « si la figure du corps change, la figure de la surface enveloppante change. » Le premier consiste à découper un parallélépipède parallèlement à ces faces et à recomposer ensuite les morceaux pour obtenir un nouveau solide.

> Parmi ceux-là, le parallélépipède. Si on partage en tranches de faces parallèles et parallèles à deux de ses faces, qu'on ordonne et recompose ses parties, de sorte que chacune de ses parties soit posée à côté de l'autre afin que les faces parallèles deviennent deux surfaces parallèles ; si on joint les unes aux autres, alors la surface enveloppant le corps sera plus grande que la première surface qui enveloppait le corps avant sa partition[114].

Par exemple[115] : soit A un cube dont l'aire d'une face est $a$ que l'on coupe en deux (figure 21). La surface de l'objet A est $6a$ et la surface de l'objet B est $4a + 6 \times \frac{a}{2} = 7a$. Par un tel procédé, la surface de l'objet B est plus grande que celle de l'objet A alors que leurs volumes sont identiques. Pour Ibn al-Haytham, il y a ainsi deux lieux différents pour un même corps, ce qui constitue bien une contradiction. Plus exactement, ce premier exemple montre qu'un corps peut rester inchangé tout en ayant un lieu-enveloppe de plus en

[113] [38] p.668

[114] [38] p.670

[115] Dans son texte, Ibn al-Haytham ne donne pas d'exemple numérique précis, il reste dans un cadre général.

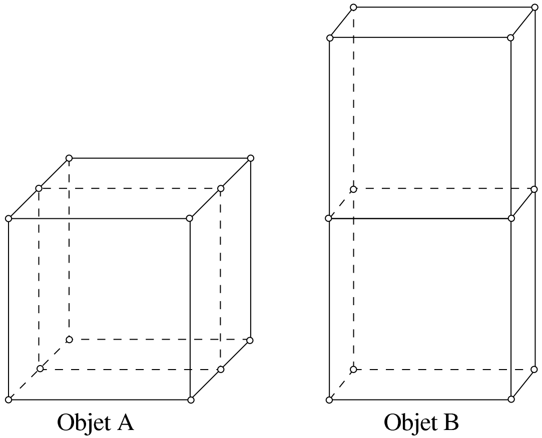



FIG. 21 – Contradiction pour le lieu-enveloppe

plus grand. Après le cas de l'augmentation de l'aire à volume constant, Ibn al-Haytham se penche sur celui de la variation du volume à surface constante, puis à la diminution du volume alors que la surface augmente. Pour cela, il propose deux exemples : d'abord celui de l'outre que l'on vide, puis celui d'un solide dans lequel on pratique des trous de différentes formes. Pour terminer, Ibn al-Haytham montre qu'à volume constant l'aire peut augmenter ou diminuer. Pour cela, il soumet l'idée d'un cube de cire que l'on modèle.

> En effet, un corps susceptible d'être affecté, comme la cire, le plomb, l'eau et tout corps liquide, peut prendre des formes différentes, sans que rien ne lui soit ajouté ni retranché. Si par exemple la cire – ou ses analogues – a la forme d'un cube, sa surface enveloppante sera son lieu ; si ensuite nous façonnons ce même corps en une sphère, son lieu sera la surface sphérique qui l'enveloppe. Mais la surface sphérique est toujours plus petite que la

> somme des faces du cube, si le corps de la sphère est égal au corps du cube. Nous avons démontré cette notion dans notre livre : La sphère est la plus grande des figures solides ayant des périmètres égaux[116].

Contrairement aux précédents, cet exemple nécessite de solides connaissances en géométrie pour être appréhendé et pour cette raison Ibn al-Haytham rappelle le traité dans lequel il s'est occupé de cette question. L'argumentation d'Ibn al-Haytham est exclusivement mathématique et c'est sur ce terrain qu'il cherche à invalider la théorie aristotélicienne du lieu. L'ensemble des exemples donnés, sans constituer une véritable démonstration philosophique contre Aristote, montre que la définition du lieu comme surface enveloppante n'assure en rien son invariabilité. Il n'y a donc pas de possibilité de définir un lieu-enveloppe unique pour un corps donné et c'est sur ce dernier point que s'achèvent les discours d'Ibn al-Haytham contre la théorie aristotélicienne du lieu.

Dans la deuxième partie du traité sur le lieu, il passe à la critique du vide.

> Quant au vide imaginé rempli par le corps, une ambiguïté se présente dans ce cas lorsqu'on dit que le vide n'existe pas dans l'univers. Si on dit que le lieu du corps est le vide, il s'ensuit nécessairement que le lieu du corps est une chose qui n'existe pas. Et pourtant le corps existe, et tout corps existant est dans un lieu. Si donc ce qui est dans un lieu existe, son lieu existe. Il s'ensuit nécessairement que le vide existe ; or ceci est une affirmation monstrueuse dans la bouche de celui qui affirme que le vide n'existe pas[117].

Sur le vide, Ibn al-Haytham ne se fait pas aussi féroce qu'à l'encontre des thèses aristotéliciennes. Il souligne seulement

[116] [38] p.672
[117] [38] p.674

que, pour ceux qui ne croient pas en l'existence du vide, ce qui semble être la pensée commune, la définition du lieu comme étant le vide rempli par le corps impose de concevoir le vide par lui-même, ce qui, en soi, constitue une difficulté. Contrairement à la première partie de son argumentaire où « aucune des ambiguïtés que nous avons relevées ne peut être dissipée de quelque manière que ce soit », il propose plutôt de retravailler la notion de vide afin de lever cette dernière ambiguïté. Ibn al-Haytham ne rejette pas l'idée de vide, au contraire, il l'intègre dans son propre système de pensée[118]. Pour le géomètre, le vide « n'est que les distances dépourvues de matière » et le vide rempli par un corps est constitué par les « distances imaginées égales aux distances du corps. » Tout ce dont parle Ibn al-Haytham, en dehors peut-être des corps, prend place dans l'*imagination* qui joue le rôle d'un réceptacle vide totalement libéré des contraintes du monde sensible. De cette manière, il n'a pas à justifier de l'existence ou non du vide dans l'univers car il ne se place pas dans l'univers sensible, mais dans un espace propre que toute la suite du texte permet d'expliciter. Tout réside dans la possibilité d'égaler deux ensembles de distances, l'un dans les corps, l'autre dans l'imagination. Pour Ibn al-Haytham, « le vide imaginé rempli par le corps est donc des distances imaginées, sur lesquelles se sont superposées les distances du corps, et qui sont devenues les seules et mêmes distances. » Après avoir éclairé le lecteur sur sa conception du vide, à savoir un ensemble de distances, Ibn al-Haytham passe à l'étude proprement dite du lieu qu'il commence par distinguer du vide.

[118] « Si on dit pour répondre à cette affirmation : le vide n'est que des distances dépourvues de matière ; le vide imaginé qui a été rempli par le corps est les distances imaginées égales aux distances du corps, si on les imagine dépourvues de matière, le vide imaginé qui a été rempli par le corps est donc des distances imaginées égales aux distances du corps sur lesquelles se sont superposées les distances du corps imaginées dans le corps. », [38] p.674

> Le vide imaginé rempli par le corps ne sera autre que les distances du corps, que si celui qui imagine forme dans son imagination des distances égales aux distances du corps, et semblables à la figure du corps – alors la figure qui est dans l'imagination, isolée du corps, ne sera pas le lieu du corps[119].

Le vide imaginé, conçu à partir des distances, et le corps dont on ne considère finalement que l'extension subissent un traitement mathématique identique, mais ils doivent être distingués.

> Mais le lieu du corps n'est que les distances sur lesquelles se sont superposées les distances du corps, avec lesquelles elles se sont unies, et auxquelles la figure qui est dans l'imagination est semblable[120].

Le lieu d'un corps procède de deux choses : d'un corps dont on détermine les distances, et d'un ensemble de distances imaginées formant une figure imaginée. C'est alors la superposition de ces deux ensembles de distances qui détermine le lieu. Toute l'originalité des travaux d'Ibn al-Haytham réside dans l'affirmation de l'existence des ensembles de distances en dehors de toute matérialité. La conclusion du traité *Sur le lieu* est la suivante :

> Puisque tout ce que nous avons montré s'est éclairé, alors le lieu du corps, ce sont les distances qui, abstraites dans l'imagination, sont un vide sans matière, égal au corps, d'une figure semblable à celle du corps, ce que nous voulions démontrer dans ce traité[121].

La conception du lieu d'Ibn al-Haytham, très différente de celles qu'elle prétend combattre, n'est cependant pas sans

[119] [38] p.676
[120] [38] p.676
[121] [38] p.684

lien avec les précédentes. En construisant sa théorie contre celle d'Aristote et de Philopon, Ibn al-Haytham puise dans chacune d'elles ce qui lui semble pertinent et retravaille ensuite ses concepts. Ainsi, de la théorie aristotélicienne du lieu, il garde le rôle de la surface enveloppante qui ne délimite plus le lieu mais qui constitue un élément indispensable à la définition de l'ensemble des distances prises entre des points opposés d'une surface. De même, le vide philoponien ne constitue pas à lui seul le lieu, mais Ibn al-Haytham en garde l'idée d'une extension tridimensionnelle sans matière. C'est par cette double approche que peut se constituer une notion abstraite de lieu, dont le caractère mathématique constitue clairement le point auquel voulait aboutir Ibn al-Haytham.

La théorie du lieu confère un rôle central à l'*imagination*. Par ce terme, Ibn al-Haytham définit un espace affine euclidien de dimension au moins trois, car il contient des solides. L'imagination est un espace mathématique dans lequel évoluent des objets eux aussi mathématiques et cette distanciation par rapport aux notions sensibles de l'espace donne une grande liberté au géomètre. Ceci justifie et fonde la théorie des *Connus* dans laquelle il est possible de déplacer, d'agrandir ou au contraire de contracter des distances et par-là des figures géométriques. Sans que cela soit affirmé comme un chapitre particulier des sciences mathématiques, il s'agit de la première affirmation et définition de l'espace dans lequel se trouvent les figures.

## *La position d'al-Khayyām sur le lieu*

Novatrices par rapport à la géométrie hellénistique, l'affirmation de l'existence d'un espace et sa définition qui inclut le mouvement ne se font pas sans heurt. Al-Khayyām avait eu mot des théories d'Ibn al-Haytham et c'est en connaissance de cause[122] qu'il donne sa conception de la géométrie. Dans son *Traité d'algèbre*, al-Khayyām commence par une longue introduction dans laquelle il expose non seulement son projet concernant l'algèbre, mais aussi comment doivent être conçues les mathématiques. Selon lui, en dernier recours, il faut toujours s'en remettre à la logique présentée dans l'*Organon* d'Aristote. Sa manière de concevoir les objets de la géométrie est imprégnée par les idées aristotéliciennes.

> Les grandeurs sont les quantités continues, qui sont quatre : la ligne, la surface, le corps et le temps, comme on le trouve exposé d'une manière globale dans les Catégories, et d'une manière plus détaillée dans la Philosophie Première[123].

Conformément aux thèses d'Aristote, al-Khayyām évoque les trois types d'objets fondamentaux de la géométrie, ainsi que le temps dont il précise que, bien qu'il serait légitime de l'étudier par l'algèbre, l'usage veut qu'on laisse de côté ce type de continu. Immédiatement après ce rappel, il prend parti dans le débat sur la nature du lieu.

> Certains considèrent que le lieu est une espèce subdivisant la surface sous le genre du continu ; mais une connaissance exacte ruine cette opinion. Nous corrigerons donc : le lieu est une surface dans un certain état ; sa connaissance exacte ne relève pas du sujet qui nous occupe ici[124].

Al-Khayyām rejette l'idée d'un lieu conçu comme une simple surface continue. Ibn al-Haytham lu par al-Khayyām fait du lieu une sorte de grandeur sur laquelle tous les traitements mathématiques ou géométriques sont possibles, ce qui risque de mettre en péril l'unicité du lieu d'un corps. Pour

[122] Rien ne dit qu'il ait eu connaissance directement des écrits d'Ibn al-Haytham.

[123] R. Rashed, B. Vahabzadeh, *al-Khayyām mathématicien*, [39] p.120

[124] [39] p.120

al-Khayyām, le lieu est certes une surface, mais elle se trouve « dans un certain état. » Imposer un certain état signifie qu'il s'agit d'une situation où le changement n'a pas sa place, ce qui est conforme à la définition du lieu selon Aristote, à savoir la première surface intérieure fixe du corps enveloppant. Ce n'est pas l'aspect surface du lieu qui gêne al-Khayyām mais bien la possibilité du changement. D'une manière générale, ce sont toutes les notions absentes des prémisses de la géométrie auxquelles s'oppose al-Khayyām, et en particulier le mouvement. Dans son commentaire aux *Éléments*, il critique explicitement Ibn al-Haytham sur ce point. Le sujet de la discussion est la démonstration du cinquième postulat, celui des parallèles.

> Il [Ibn al-Haytham ] a dit notamment : si une ligne droite se meut perpendiculairement à une autre ligne, et qu'elle reste lors de son mouvement constamment perpendiculaire à cette ligne, son autre extrémité engendrera une ligne droite ; et la ligne générée sera parallèle à la ligne immobile. Il prend ensuite ces deux lignes, les incurve, les met en mouvement, et fait avec elles un certain nombre d'expériences toutes extrinsèques, jusqu'à ce que cette prémisse puisse – après avoir surmonté ces difficultés et ces choses extravagantes – être admissible pour lui[125].

Pour al-Khayyām, « ce sont là des propos qui, pour plusieurs raisons, n'ont absolument aucuns rapports avec la géométrie » car la principale difficulté est de démontrer la possibilité de tous ces déplacements. Al-Khayyām n'a vraisemblablement pas lu les *Connus* dans lesquels Ibn al-Haytham démontre la possibilité d'introduire le mouvement directement dans les prémisses de la géométrie.

> Pour ce qui est du point, de la ligne, de la surface, de l'angle, du cercle, de la ligne droite, de

[125][39] p.310

> la surface rectiligne, et des autres principes, c'est l'auteur de la Science universelle, appartenant à la philosophie, qui s'occupe de les établir et d'en donner la définition véritable[126].

Al-Khayyām a une vision aristotélicienne de la géométrie et il ne peut concevoir le mouvement d'une ligne car celle-ci est toujours liée à une surface, dont elle est la limite, et cette surface est attachée à un solide immobile par la définition de son lieu. Tous les objets sont statiques et il est impossible de penser un mouvement en faisant abstraction de l'objet concerné. Ceci signifie qu'il n'y a pas de rapport entre la géométrie et le mouvement. Ce rejet du mouvement va très loin chez al-Khayyām, car il l'amène à corriger la définition de la sphère dans les *Éléments* d'Euclide en en proposant une autre basée sur l'équidistance. Il qualifie ce passage du livre XI d'égarement de la part de son auteur, critiquant ouvertement Euclide et prouvant ainsi une objection viscérale à l'utilisation de toute forme de mouvement en géométrie.

> Alors que cet homme [Ibn al-Haytham ] s'est appliqué à ce genre de définition inacceptable afin de la transformer en prémisse pour établir une chose qui ne pouvait l'être que par une démonstration[127].

Al-Khayyām est le représentant d'attitude à l'égard des notions de la géométrie dans laquelle il s'agit de garder le lien avec la pensée aristotélicienne, mais surtout de rester fidèle à l'enseignement d'Euclide. Bien plus qu'une divergence de vues entre deux hommes, il s'agit là de la mise en évidence, au sein de la géométrie, de deux traditions de recherches distinctes.

---

[126] [39] p.308
[127] [39] p.312

### *Les dimensions*

Dans la géométrie hellénistique, l'idée de dimension se trouve vite limitée par une notion de figure encore trop marquée par ses liens avec le monde sensible. Que les dimensions soient conçues de la plus petite à la plus grande comme dans le cas des définitions euclidiennes, ou inversement de la plus grande à la plus petite par abstraction de type aristotélicienne, l'idée générale ne semble pas pouvoir se détacher des brumes de l'intuition.

### *Les dimensions chez les Banū Mūsā*

Les conceptions des dimensions héritées des Grecs sont encore présentes au début du Moyen-Âge. Il y a toujours des lignes de dimension un, des surfaces de dimension deux et des solides de dimension trois. Pourtant, dès le 9e siècle, l'idée même de grandeurs dimensionnées d'une certaine manière tend à s'infléchir.

Dans l'introduction du traité *Pour connaître l'aire des figures planes et sphériques* les Banū Mūsā reviennent sur la définition de la figure telle qu'elle se présente au début des *Éléments* et redonnent les raisons philosophiques traditionnelles de l'existence de notion comme la longueur, la largeur et la hauteur.

> La propriété commune à toute surface est de posséder seulement longueur et largeur. Mais la propriété de la figure corporelle est de posséder longueur, largeur et hauteur. Et la longueur, la largeur et la hauteur sont les quantités qui délimitent la grandeur de tout corps[128].

L'existence des différentes dimensions provient de la perception immédiate que l'on a des corps physiques, mais il s'y ajoute une notion de *quantité délimitante* qui nécessite quelques explications.

[128] [35], note 1, p.58

> La longueur est la première des grandeurs qui définissent les figures et elle est ce qui se prolonge suivant une droite dans deux directions à la fois ; et de ce qui se prolonge, on ne peut obtenir que la longueur seulement[129].

L'ordre d'établissement des dimensions, de la ligne, à la surface, puis au solide, est euclidien, mais chez les Banū Mūsā, la ligne quelconque qui servait de première dimension chez Euclide est remplacée par une longueur en soi possédant deux caractères. D'une part, elle se prolonge, et d'autre part ce prolongement se fait suivant une droite et ce dans les deux sens. Posant comme longueur tout ce qui se prolonge, la fin de cette citation affirme une sorte de réciproque qui constitue une première mathématisation des concepts intuitifs de dimension présents dans les *Éléments*.

> Si la surface se prolonge en extension, dans une autre direction que la longueur, alors ce prolongement est la largeur. La largeur n'est pas, comme beaucoup de gens le croient, la ligne qui entoure la surface dans une autre direction que la longueur. S'il en était ainsi, la surface n'aurait pas une longueur et une largeur seulement et la largeur serait également une longueur, car pour eux la largeur est une ligne et la ligne est une longueur[130].

Les Banū Mūsā cherchent à expliciter l'irréductibilité de la largeur à la longueur. Pour eux, la différence entre la longueur et la largeur provient de la différence de nature entre les notions de longueur et de largeur, et les objets qui les portent. Une largeur n'est pas une longueur simplement parce qu'une surface n'est pas une ligne droite. La volonté d'explicitation des concepts euclidiens semble alors pleinement assumée lorsqu'ils ajoutent : « Euclide a eu raison à cet égard

[129] [35] p.58
[130] [35] p.58

quand il a affirmé : la ligne est une longueur seulement et la surface est une longueur et une largeur seulement. » Euclide pose ses définitions sans aucune explication, d'où l'intérêt des commentaires des Banū Mūsā. Le passage à la dimension trois se fait de la même manière avec des mises en garde semblables de la part des géomètres.

Les dimensions résident dans ce qui se prolonge, c'est-à-dire la grandeur. Dès le départ, les Banū Mūsā sont sur un autre projet qu'une simple explication des concepts géométriques euclidiens. Tout en distinguant ce qui relève de la forme (les lignes, les limites...) de ce qui est spatial (la longueur, la largeur et la hauteur), ils donnent finalement une définition algébrique de la dimension et se placent d'emblée dans une géométrie de la mesure. Ceci est d'autant plus marquant lorsqu'ils expliquent que « ces trois grandeurs définissent la dimension de tout corps et l'extension de toute surface. Le procédé pour estimer leurs quantités s'explique par rapport à l'unité plane et à l'unité solide. » Les deux types d'unités que posent les Banū Mūsā vont servir à mettre en place une méthode de calcul des aires et des volumes.

> L'unité plane par laquelle on mesure la surface est une surface de longueur, de largeur un et à angles droits. L'unité solide par laquelle on mesure un solide est un solide de longueur un, de largeur un et de profondeur un et dont les surfaces s'élèvent les unes sur les autres à angles droits[131].

Le choix du carré unité et du cube unité, rend compte d'une volonté d'homogénéité dans les calculs car, comme ils le soulignent, « la grandeur par laquelle on mesure les surfaces et le corps nécessite en effet de s'unir à elle-même. » Selon les Banū Mūsā, pour mesurer une surface ou un solide, il faut *répéter* l'unité et ainsi remplir l'espace où se trouve la figure

[131] [35] p.59

*sans laisser de vide*[132]. C'est alors pour des considérations pratiques que l'angle droit s'impose car il faut que la « distinction soit aisée entre ce qui a été mesuré complètement et ce qui ne l'a pas été. »

## *Al-Sijzī et les hypersphères*

Avec les liens intimes qui se dessinent entre l'algèbre naissante et la géométrie, une notion de dimension indépendante des objets apparaît. L'ouvrage d'al-Sijzī, *Livre sur la mesure des sphères par les sphères* est sur cet aspect un précieux témoignage. Dans ce traité, al-Sijzī propose d'établir un certain nombre de relations de degré trois. La particularité de son approche réside dans la volonté de mesurer des sphères par des sphères et non de recourir aux cubes. Ceci ne peut se faire directement et pour pouvoir s'appuyer sur la géométrie, al-Sijzī fait débuter son ouvrage par une proposition liant les sphères et les cubes.

> Si un cube est égal à plusieurs cubes et que l'on construit une sphère sur le côté du cube et des sphères sur les côtés des cubes, alors cette sphère-ci est égale à ces sphères-là[133].

Ce premier résultat constitue la base de tout l'édifice. Dans toutes les propositions qui suivront, al-Sijzī commence par ramener les sphères à des cubes sur lesquels il peut ensuite raisonner. Dans les propositions 11 et 12, les recherches d'al-Sijzī débouchent sur des résultats d'apparence faux mais qui deviennent valables si on considère non pas des sphères de dimension trois, mais des hypersphères de dimension quatre. Dans son édition de ce texte, P.Crozet explique que « tout

[132] « [La grandeur par laquelle on mesure nécessite] de s'unir à elle-même, lors de sa répétition, de façon à ne laisser aucun vide sans le combler. », Banū Mūsā , [10] p.59

[133] Al-Sijzī, *Livre sur la mesure des sphères par les sphères*, in *L'idée de dimension chez Al-Sijzī* , P. Crozet, *Arabic Sciences and Philosophy*, vol.III [10] p.251-286

semble converger vers une certaine idée de la dimension. C'est un peu comme si, lorsqu'al-Sijzī parlait de la sphère de diamètre AB, il voulait aussi parler de la dimension 3 du segment dans le sens d'une élévation strictement géométrique à la puissance 3, sans aucune référence algébrique[134]. » L'édifice repose sur la première proposition dans laquelle al-Sijzī affirme que l'étude des volumes des sphères peut se ramener à celle des cubes. Cette proposition peut s'exprimer ainsi : si $d_1^3 + d_2^3 = d_3^3$ alors $S_1 + S_2 = S_3$ (où les $S_i$ sont les sphères de diamètre $d_i$). La preuve repose sur un résultat bien connu depuis Euclide (*Éléments* XII-18) : $\frac{S_1}{S_2} = \frac{d_1^3}{d_2^3}$. Par extension de ce résultat à des ordres plus élevés, dans la proposition 11, al-Sijzī utilise $\frac{S_1}{S_2} = \frac{d_1^4}{d_2^4}$ et passe ainsi à des hypersphères de dimension quatre. Le procédé pourrait être continué indéfiniment, mais al-Sijzī ne l'évoque pas.

## *Al-Khayyām : tradition euclidienne et modernité algébrique*

À plusieurs reprises dans ses écrits, les recherches d'al-Khayyām sur les équations l'amènent à s'intéresser à la question du degré.

> Il est de coutume, chez les algébristes, de nommer dans leur art l'inconnue qu'on veut déterminer, « chose », son produit par elle-même « carré », son produit par son carré « cube », le produit de son carré par son semblable « carré-carré », le produit de son cube par son carré « carré-cube », le produit de son cube par son semblable « cubo-cube », et ainsi de suite aussi loin que l'on veut[135].

Al-Khayyām introduit une terminologie qui s'appuie sur la connaissance usuelle des grandeurs géométriques euclidiennes

[134] [10] p.260-261
[135] [39] p.120

Ce choix marque déjà la volonté de rester au plus près des canons euclidiens tout en cherchant à élaborer une *bonne* théorie pour l'algèbre. Dans ces conditions, le carré-carré de dimension quatre pose problème et al-Khayyām commence par expliquer en quoi il n'est pas une grandeur continue.

> Et si l'algébriste emploie le carré-carré dans des problèmes de géométrie, c'est métaphoriquement, et non pas proprement, étant donné qu'il est impossible que le carré-carré fasse partie des grandeurs[136].

Ensuite il cite les trois dimensions géométriques traditionnelles, et conclut sur :

> Or, comme il n'existe aucune autre dimension, ne font partie des grandeurs ni les carré-carré, ni, à plus forte raison, ce qui lui est supérieur[137].

Al-Khayyām exclut de la géométrie tout ce qui est de dimension supérieure à trois. Pourtant, comme il l'évoque lui-même, le degré quatre ou plus peut survenir au détour d'un problème, il faut donc pouvoir en rendre compte. Dans le *Traité d'algèbre*, il explique une première fois que « si on parle de carré-carré dans les grandeurs, on ne le dit que pour le nombre de leurs parties, quand on les mesure, mais pas pour elles-mêmes en tant que mesurables, ce qui est différent. » La réflexion repose sur les idées d'unité et de pluralité sur lesquelles il revient dans son traité sur la *Division d'un quart de cercle*.

> Je dis : ce que les algébristes nomment carré-carré est quelque chose d'imaginé dans les grandeurs continues, et qui n'existe en aucune manière dans les individus. Mais les termes carré-carré, carré-cube et cubo-cube, et ceux qui sont au-delà, sont dits des grandeurs continues, en

[136] [39] p.122
[137] [39] p.122

tant que le nombre est dit de ces grandeurs si elles <deviennent> des pluralités[138].

Ainsi, il existe pour les quantités d'ordre supérieur à trois la même relation que celle qui existe entre le nombre et les grandeurs. Mais al-Khayyām insiste sur le danger d'assimiler carré-carré et *grandeur* de dimension quatre. Cette dernière ne peut exister car « la surface a en effet deux dimensions, et deux dimensions par deux dimensions font quatre dimensions ; or le corps ne peut avoir plus de trois dimensions. » De plus, pour al-Khayyām l'algèbre ne saurait être un moyen pour prouver l'existence de grandeurs d'ordre plus grand que trois et il prend l'exemple d'une équation carré-carré dont il montre que la résolution trompe le lecteur sur la vraie nature des objets en présence. Il considère l'équation $x^4 + 3x^2 = 28$ dont la solution est $x = 2$. C'est-à-dire que dans l'équation apparaît $x^4$ qui vaut alors 16 et qui est un carré-carré. Cependant, al-Khayyām montre que l'équation que l'on a résolue est en fait $x^2 + 3 = 28$ et que l'on considère *a posteriori* la solution comme un carré. Ce changement d'inconnue n'est pas simplement une attaque contre d'éventuels défenseurs de la multiplicité des dimensions, c'est aussi le révélateur de la notion de degré à l'œuvre chez al-Khayyām. Comparée à celle d'al-Sijzī, cette démarche offre l'avantage de ne pas devoir poser comme préexistant des objets de dimensions non géométriques. Pour cette raison, al-Khayyām est tout à fait dans son droit lorsqu'il dit que « ceux qui croient que l'algèbre est un artifice destiné à déterminer les nombres inconnus, croient l'impossible » car les seuls véritables objets sont ceux de la géométrie tridimensionnelle.

## *Intérieur, extérieur et continuité*

Dans la géométrie grecque, des propriétés spatiales telles l'intérieur, l'extérieur et le passage de l'un à l'autre par conti-

[138] [39] p.248

nuité relèvent entièrement de l'intuition. Cette intuition se fonde sur une certaine perception de l'espace sensible, ce dernier servant de justification implicite aux concepts utilisés. Ce n'est plus le cas chez les géomètres arabes qui désormais prennent en compte les problèmes d'existences, en particulier lors d'intersections de courbes.

Dans son traité *Sur un problème numérique solide*, Ibn al-Haytham propose le problème suivant :

> Nous voulons partager un nombre connu en deux parties telles que l'une soit le cube de l'autre[139].

Ceci revient à l'équation $x = (a - x)^3$, qu'Ibn al-Haytham résout à partir d'un lemme qui se ramène à l'intersection d'une parabole et d'une hyperbole.

> *Lemme*[140] : Trouver quatre grandeurs $a_1, a_2, a_3, a_4$ telles que :
>
> 1. $0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4$
> 2. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4}$
> 3. $\frac{a_4 - a_3}{a_1} = k = \frac{b}{c}$ un rapport connu.
>
> Dans un repère $(\mathrm{N}x, \mathrm{N}y)$,
> plaçons les points $A(c, b), B(c, 0), D(2c, 0)$ et $E(2c, b)$.
> Traçons ensuite
> $\mathcal{H} = (x, y); y(x - c) = bc,$
> $\mathcal{P} = (x, y); y = \frac{x^2}{c}, x > 0.$

Ensuite, Ibn al-Haytham démontre l'existence du point G, point d'intersection des courbes $\mathcal{H}$ et $\mathcal{P}$ (figure 22).

> La section NO coupe la section EGH puisque plus on prolonge la section de NO dans la direction de O, plus elle s'éloigne de l'axe NU ; elle s'éloigne donc de la droite AB ; et plus on prolonge la section EGH dans la direction de E, plus elle s'approche de la droite BA, comme on

[139] [36] p.496
[140] [36] p.426

l'a montré dans la proposition 14 du livre II des Coniques. La section NO coupe donc la section EGH ; qu'elle la coupe au point G[141].

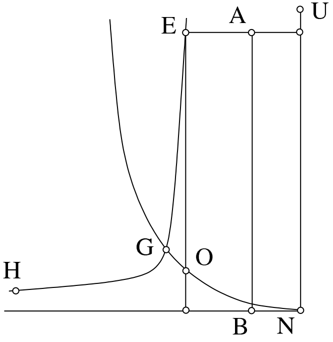



FIG. 22 – Proposition

Pour sa démonstration, Ibn al-Haytham fait appel au comportement asymptotique des courbes ainsi qu'à des notions élémentaires de topologie telles que l'intérieur et l'extérieur du secteur déterminé par une courbe. En dernier ressort, c'est une notion de continuité qui assure l'existence du point d'intersection. Lors de l'élaboration de la géométrie des *Connus*, Ibn al-Haytham a introduit le mouvement dans les prémisses de la géométrie. Ce mouvement détermine la nature des objets de la géométrie mais aussi leur comportement. Ainsi, il n'apparaît pas nécessaire à l'auteur de préciser davantage le pourquoi de ces intersections car elles proviennent de la continuité des courbes, elle-même issue du mouvement. Cette forme de continuité n'est évidemment pas nouvelle, elle est déjà présente chez les Grecs, mais pour la première fois elle n'est pas complètement implicite. Le fait de placer le mouvement avant d'introduire la continuité, exactement ce que rejetait al-Khayyām, lui donne un statut tout autre et en

[141] [36] p.498-500

fait une notion qui quitte l'univers philosophique pour entrer dans celui des mathématiques.

Dans cet exemple, la distinction entre un point intérieur et un point extérieur se fait grâce aux distances qui les séparent d'une droite. Dans les *Connus*, Ibn al-Haytham insiste longuement sur ce qui constitue l'essentiel de sa théorie, à savoir la notion de distance, qui n'est pas à prendre dans son sens numérique mais *via* la relation qu'elle induit entre les objets. Ainsi, la démonstration de l'intersection de deux courbes par la distinction de points intérieurs et extérieurs dépasse le cadre de l'exemple numérique pour atteindre le statut d'une situation géométrique où seules comptent les relations. La possibilité d'une détermination métrique de la position, un système de coordonnées par exemple, s'efface au profit d'une géométrie, en quelque sorte, descriptive. En mettant en avant les relations entre les objets plus que leurs caractéristiques propres, Ibn al-Haytham ouvre une nouvelle voie de recherche en géométrie. C'est cette voie qu'emprunteront certains géomètres du 17^e^ siècle et qui mènera à terme à la topologie.

La nouvelle exigence démonstrative introduite par Ibn al-Haytham fait école et quelques siècles plus tard, les démonstrations d'existence deviennent incontournables pour la résolution d'équations algébriques. À la suite des travaux d'al-Khayyām, al-Ṭūsī rédige un traité d'algèbre qui aborde le même sujet tout en en modifiant considérablement la structure[142]. Bien plus que son prédécesseur, al-Ṭūsī se penche sur les intersections de courbes et leur existence. Pour ce faire, un peu à la manière d'Ibn al-Haytham, il procède en distinguant l'intérieur et l'extérieur d'une courbe convexe et montre que l'une des deux courbes coupe l'autre[143]. La détermination

[142]Sur les différences entre les projets d'al-Khayyām et d'al-Ṭūsī, on pourra se reporter à l'édition critique des œuvres mathématiques d'al-Ṭūsī, R.Rashed, *Sharāf, al-Dīn al-Ṭūsī, Œuvres mathématiques*, Les Belles Lettres, 1986 [34]

[143]Voir C.Houzel, *La géométrie algébrique*, [23] p.16-17

d'un point à l'intérieur d'un secteur se fait par l'intervention d'une relation métrique entre ce point et une droite choisie de manière à permettre la comparaison de cette longueur avec celle correspondant aux points sur la courbe. Comme chez Ibn al-Haytham, il y a dans les travaux d'al-Ṭūsī une volonté manifeste de rendre compte *mathématiquement* de notions autrefois admises implicitement.

## *Vers une nouvelle géométrie*

Avec les géomètres arabes, pour la première fois dans l'histoire, la nécessité d'étudier l'espace transparaît dans les écrits des mathématiciens. La refonte du concept de lieu ne relève pas seulement du débat philosophique mais bel et bien d'une volonté de clarifier une certaine idée de la spatialité. Plus qu'une manière de penser les objets, c'est toute la conception de ce que doit être la géométrie qui se trouve infléchie. De géométrie des figures, celle d'Euclide, la *science de l'espace* est devenue une géométrie des relations entre les figures avec tous les changements que cela a supposés.

3

# La question de l'espace dans la géométrie classique

> Le meilleur créateur sera seulement celui qui aura appris à reconnaître les bords de la superficie et toute sa qualité (...), donc j'affirme qu'il est nécessaire que le peintre apprenne la géométrie.
>
> Leon Battista ALBERTI

## *La géométrie à l'aube du 17e siècle*

Entre le 14e et le 16e siècle, la problématique de l'espace prend un tour nouveau. Loin de se restreindre à la seule géométrie, les questionnements sur l'infini, le vide ou l'espace se développent dans de multiples champs de connaissance comme la théologie, la cosmologie, la mécanique, l'art... Chez Bradwardine, la définition de l'infini vient au cœur des réflexions sur le divin[144], pour Galilée, l'Univers est « écrit dans la langue mathématique et ses caractères sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques[145] », Léonard de Vinci conjugue art et étude de la Nature et les

[144] Sur les liens entre religion et mathématiques, voir J. BIARD, *De la théologie aux mathématiques : l'infini au XIVe siècle* [9]

[145] GALILÉE, *L'essayeur*, [19] p.141

peintres comme Alberti, Piero della Francesca ou Albrecht Dürer repensent la représentation du monde à travers de nouvelles règles géométriques[146]... Paradoxalement, ce bouillonnement intellectuel n'enrichit pas directement la géométrie. À de rares exceptions près, Desargues[147] en particulier, les traités de géométrie ne contiennent pas de traces de ces réflexions qui constituent plus un contexte épistémologique qu'une ligne de recherche mathématique. Dignes héritiers des idées de la Renaissance, ce sont finalement les savants du 17e qui vont permettre un retour des questionnements sur l'espace dans les ouvrages de mathématiques.

### *Géométrie et algèbre*

Publiée en 1637, la *Géométrie* constitue l'aboutissement du travail de recherche en géométrie entrepris par Descartes. Dans la seconde partie de l'ouvrage, sous-titrée « de la nature des lignes courbes », Descartes élabore une nouvelle classification des courbes dont l'objectif est de définir les lignes acceptables en géométrie et de caractériser celles qui ne le sont pas.

> Considérant la Géométrie comme une science, qui enseigne généralement à connaître les mesures de tous les corps, on ne doit pas plutôt exclure les lignes les plus composées que les plus simples, pourvu qu'on les puisse imaginer être décrites par un mouvement continu, ou par plusieurs qui s'entresuivent et dont les derniers soient réglés par ceux qui les précèdent. Car par ce moyen on peut toujours avoir une connaissance

[146] Pour une approche critique de cette question, on pourra consulter L.Vinciquerra, *Archéologie de la perspective : Sur Piero della Francesca, Vinci, Dürer* [42]

[147] Le *Brouillon project* [11] de G.Desargues a fortement influencé les études sur les coniques du 17e siècle.

exacte de leur mesure[148].

Les courbes acceptables en géométrie doivent être produites à partir de mouvements réglés les uns par rapport aux autres. Celles-ci s'opposent aux courbes mécaniques, comme la spirale ou la quadratrice, qui sont « décrites par deux mouvements séparés, et qui n'ont entre eux aucun rapport qu'on puisse mesurer exactement. » Pour les courbes continues produites par des mouvements composés réglés les uns par rapport aux autres, la conclusion est la suivante :

> Et en quelque autre façon, qu'on imagine la description d'une ligne courbe, pourvu qu'elle soit du nombre de celles que je nomme géométriques, on pourra toujours trouver une équation pour déterminer tous ses points en cette sorte[149].

Pour Descartes, « seules les courbes algébriques réalisent cette adéquation de l'étendue et de la fonction[150] » et l'intérêt est alors évident pour la résolution des problèmes géométriques. Ceux-ci se ramènent à l'étude des équations dont on construit ensuite les points, ou lignes, solutions. Descartes termine la deuxième partie de la *Géométrie* en appliquant ses méthodes à la résolution du problème de Pappus. À cette occasion, il rappelle la classification des différents lieux géométriques et met clairement en évidence le lien entre la dimension du lieu et le nombre d'inconnues dans la solution du problème.

## *Dimensions et définition cartésienne du lieu*

Chez Descartes, le concept de dimension n'est pas seulement conçu à travers la traditionnelle tridimensionnalité de l'espace, mais plutôt comme un système de mesure du monde

[148] [12] p.349
[149] [12] p.354
[150] J. Vuillemin, *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*, [43] p.9

sensible. L'univers possède de multiples aspects et la dimension doit pouvoir en rendre compte.

> Par dimension, nous n'entendons pas autre chose que le mode et la manière selon laquelle un sujet est considéré comme mesurable : de la sorte, non seulement la longueur, la largeur et la profondeur sont les dimensions du corps, mais encore la pesanteur est la dimension suivant laquelle les sujets sont pesés, la vitesse est la dimension du mouvement, et infinité d'autres choses de cette sorte[151].

La dimension est une mesure dont les grandeurs géométriques ne sont que des cas particuliers. Cette posture philosophique a des conséquences en mathématiques, et dans un court opuscule daté entre 1619 et 1621, il évoque la possibilité d'étendre un résultat à des dimensions supérieures à trois. Dans ce texte, Descartes s'intéresse aux propriétés des tétraèdres et en particulier à ceux dont les faces se coupent à angle droit en l'un des sommets. L'objectif est d'essayer de prolonger le théorème de Pythagore aux objets tridimensionnels.

> Dans le tétraèdre rectangle, le carré de la base est égal au carré des trois faces prises ensembles. Soient, par exemple, les trois côtés de la base, $\sqrt{8}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{20}$ ; et les trois arêtes latérales 4, 2, 2 ; l'aire de la base sera 6, et celles des trois faces seront 2, 4, 4, nombres dont les carrés sont respectivement 36, 4, 16, 16 ; et la somme des trois derniers est égale au premier.
> Pareillement, soient les côtés de la base $\sqrt{13}$, $\sqrt{20}$ et 5 ; et les arêtes latérales 2, 3, 4 ; l'aire de la base sera $\sqrt{61}$ et celles des faces 3, 4, 6 ; nombres dont les carrés sont 61 d'une part, et 9, 16, 36 d'autre

[151] Descartes, *Règles pour la direction de l'esprit*, [14] p.118-119

> part.
>
> Avec cela, on pourra résoudre plusieurs questions relatives aux tétraèdres rectangles et aussi aux tétraèdres non rectangles par leurs relations avec les premiers[152].

La preuve repose sur une simple vérification : la somme des carrés des aires des faces entourant l'angle droit fait bien le carré de l'aire de la base.

> Cette démonstration suit celle de Pythagore, et peut être étendue aussi à une quantité de quatre dimensions dans laquelle le carré du solide opposé à l'angle droit est égal aux carrés des quatre autres solides ensembles. Qu'on ait pour cela le paradigme des progressions dans les nombres 1, 2, 3, 4 ; dans les figures le côté, la puissance, le cube* ; dans les angles droits, deux lignes, trois, quatre[153].

Descartes met en parallèle la notion de dimension avec les progressions qui existent tant dans les nombres, que dans les grandeurs géométriques ou dans les angles droits. Il n'y a pas d'extension à l'infini du procédé qui se limite aux degrés inférieurs à quatre, voire à la dimension trois dans le cas des figures. Comme chez al-Khayyām, le fait d'avoir quatre dimensions est plus un attribut algébrique des nombres qu'une réalité géométrique. En ce sens, la généralisation à la dimension quatre est permise par la définition des dimensions en tant que ce qui est mesurable, et donc ce qui est régi uniquement par l'algèbre.

La figure, l'étendue et le mouvement, font partie de ce que Descartes nomme des choses simples matérielles. N'existant que dans les corps, les choses simples, comme le lieu et le mouvement, sont immédiatement comprises et ne nécessitent

[152] [13] p.246

[153] [13] p.247. * dans le texte, les puissances sont notées avec des signes cossiques, traduits ici par une note de Leibniz.

pas de savants discours. Descartes conteste l'idée de *lieu surface enveloppante* et la classe parmi les problèmes liés à un usage fautif des mots. Le lieu, simple réponse à la question *où*, consiste en « un certain rapport entre l'objet qu'on dit être dans le lieu et les parties de l'espace extérieur[154]. » Descartes lie le lieu et l'espace et conformément à l'ensemble de sa philosophie, il place les relations au premier plan. L'espace est alors entièrement déterminable par les relations géométriques[155]. Il y a néanmoins chez Descartes une séparation entre l'espace de la physique et l'espace géométrique[156]

> Par étendue nous entendons tout ce qui a une longueur, une largeur et une profondeur, sans rechercher si c'est un véritable corps ou un espace seulement ; il n'est pas besoin d'une plus longue explication, à ce qu'il semble, puisqu'il n'y a rien du tout qui soit perçu plus facilement par notre imagination[157].

Que l'étendue considérée soit celle d'un corps existant ou non importe peu car l'objectif de la géométrie est de s'occuper « d'un objet étendu, sans considérer absolument rien d'autre en lui que son étendue même et en évitant à dessein le mot de quantité, parce qu'il y a certains Philosophes tellement subtils qu'ils ont aussi distingué celle-ci de l'étendue[158]. » L'étude de cette étendue permet de la comparer

[154] [14] p.100

[155] « à chaque instant, des relations géométriques définissent la situation des corps les uns par rapport aux autres. À chaque instant, Dieu crée un Univers où les distances réciproques de chaque corps sont différentes. Si je puis déduire la position d'un corps de sa position et sa vitesse aux instants précédents, c'est seulement parce que la volonté de Dieu est constante, et éternelles les lois qu'elle établit. Ce monde instantané et sans mystère est donc toujours géométriquement définissable, offert tout entier à notre intuition, et notre mathématique épuise son être. », F. Alquié, [2] p.55

[156] [43] p.94

[157] [14] p.111

[158] [14] p.118

à d'autres, de déterminer les proportions, et Descartes propose de réduire cette recherche à celle des trois aspects que sont : la dimension, l'unité et la figure. Sur ce dernier point, la mise en place des courbes algébriques est une illustration exemplaire.

### *Les courbes géométriques selon Fermat*

Dans un texte intitulé *De la comparaison des lignes courbes avec les lignes droites*, Fermat dénonce les géomètres qui prétendent qu'on ne peut « trouver une droite égale à une courbe, à moins de supposer d'abord une droite égale à une autre courbe. » Pour lui, certains cas, comme la cycloïde, nécessitent effectivement ce genre d'hypothèse, mais « il est dangereux sur un ou deux faits d'expérience de conclure aussitôt un axiome. »

> Je vais en effet démontrer l'égalité à une droite d'une courbe véritablement géométrique et pour la construction de laquelle on n'a à supposer aucune égalité semblable d'une autre courbe avec une droite[159].

Fermat cherche l'égalisation *exacte* d'une droite et d'une courbe et, s'inspirant ouvertement de la méthode d'approximation d'Archimède, il montre que tous les calculs peuvent être effectués à partir de figures circonscrites uniquement. Sur l'exemple de la courbe d'équation $y^3 = cx^2$, Fermat rapproche le problème de l'égalisation *exacte* d'une droite et d'une courbe à celui de la rectification d'un arc de parabole dont on sait depuis Archimède qu'elle est possible. La preuve est donc terminée, mais prenant les devants d'éventuelles critiques sur l'utilisation d'un arc de parabole dans la preuve, Fermat ajoute un complément à la fin de sa démonstration dans lequel il explique comment obtenir les résultats par une construction à la règle et au compas.

[159] Fermat, *Œuvres*,Tome III, [18] p.181

Après avoir rectifié sa parabole généralisée, Fermat introduit celle-ci au rang des objets *géométriques*.

> Si cette propriété de notre courbe parabolique ne suffit pas pour la faire placer par les géomètres au rang des objets particulièrement remarquables de leur Science, ce qui va suivre lui assurera peut-être ce rang. Car qu'y a-t-il de plus singulier que de voir, de cette seule courbe, en dériver une infinité d'autres différentes de cette première et différentes entre elles, et qu'on démontrera néanmoins être égales à des droites données[160] ?

La capacité d'une courbe à engendrer une classe entière et la possibilité de sa rectification sont, pour Fermat, les caractères spécifiques des objets géométriques. À l'instar des droites et des cercles, certaines courbes sont à la fois des objets et des outils et ce double statut permet d'obtenir un véritable objet géométrique.

> Pour établir les équations, il est commode de prendre les deux quantités inconnues sous un angle donné que l'on supposera d'ordinaire droit, et de nous donner la position et une extrémité de l'une d'elle ; ainsi tant qu'aucune des deux quantités inconnues n'est plus grande que le carré, le lieu sera plan ou solide[161].

Fermat privilégie un type de représentation des courbes à l'aide de coordonnées et par celle-ci le lieu géométrique et le tracé se trouvent mis en relation. L'aspect *géométrique* du lieu est alors justifié par ce lien avec les courbes dont la nature résulte quant à elle de relations mathématiques.

---

[160] [18] p.186

[161] Fermat, *Ad locos planos et solidos isagoge*, cité dans R.Rashed, *Fermat and Algebraic Geometry*, [37] p.9-10

Vers le milieu du 17$^{\text{e}}$ siècle, Pascal compose un petit traité de géométrie élémentaire[162]. Intitulé *L'introduction à la géométrie*, ce qui nous est parvenu de ce texte se décompose en deux grandes parties. La première concerne les *principes* qui sont de courtes affirmations décrivant l'objet de la géométrie. La deuxième est constituée de *théorèmes connus naturellement* par lesquels Pascal pose un certain nombre de règles qui relèvent le plus souvent d'une axiomatique de la géométrie. Le premier principe, donné par Pascal, définit l'objet de la géométrie.

> principe 1. l'objet de la pure Géométrie est l'espace, dont elle considère la triple étendue en trois sens divers qu'on appelle dimensions, lesquelles on distingue par les noms de longueur largeur et profondeur en donnant indifféremment chacun de ces noms à chacune de ces dimensions, pourvu qu'on ne donne pas le même à deux ensemble. Elle suppose que tous ces termes-là sont connus d'eux-mêmes[163].

Pour Pascal, l'objet de la géométrie ne se situe pas dans les corps mais en l'espace lui-même[164]. Dès le premier principe, Pascal libère la géométrie de ses attaches sensibles et fait

[162] Cet ouvrage est perdu, mais des extraits se trouvent dans des écrits de Leibniz. Selon J.Itard, c'est lors de son séjour à Paris que Leibniz a été mis en contact avec ce document.

[163] [25] p.281

[164] Cette thématique apparaît aussi dans d'autres textes. Ainsi, dans *De l'esprit géométrique*, Pascal annonce clairement que la géométrie traite de l'espace, sans toutefois définir ce terme. « On trouvera peut-être étrange que la géométrie ne puisse définir aucune des choses qu'elle a pour principaux objets : car elle ne peut définir ni le mouvement, ni les nombres, ni l'espace ; et cependant ces trois choses sont celles qu'elle considère particulièrement et selon la recherche desquelles elle prend ces trois noms différents de mécanique, d'arithmétique, de géométrie, ce dernier mot appartenant au genre et à l'espèce. », Pascal, *Œuvres* T.II, [31] p.161

d'elle une science de l'espace. Comme le temps ou le mouvement, l'espace est un principe perçu par le *cœur* et ne nécessite pas de démonstration. Il le note dans les *Pensées*, « le cœur sent qu'il y a trois dimensions dans l'espace et que les nombres sont infinis et la raison démontre ensuite qu'il n'y a point deux nombres carrés dont l'un soit le double de l'autre. Les principes se sentent, les propositions se concluent[165]. » La tridimensionnalité de l'espace est donc intuitive et les précisions sur l'irréductibilité des dimensions qui suivent ne font qu'affirmer des choses déjà connues sur le sujet. D'un espace de dimension trois, Pascal ne considère que l'étendue, c'est-à-dire un espace abstrait dont la nature est précisée par les autres principes.

> principe 2. l'espace est infini selon toutes ses dimensions.
> principe 3 et immobile en tout et en chacune de ses parties[166].

La géométrie de Pascal est statique car les figures, c'est-à-dire les parties de l'espace[167], sont elles-mêmes immobiles. Pour Pascal, le point est un *indivisible* dont la nature diffère de celle l'étendue[168] et dont le seul caractère est, comme chez les platoniciens, d'avoir une position.

> principe 7 les points ne diffèrent que de situation.
> principe 8 les lignes [ne différent que] de situation, de grandeur de direction, les droites par le plus court chemin.
> principe 9, la distance de deux points est la ligne droite.

[165] [31] p.573
[166] [25] p.282
[167] En général, Pascal définit le lieu comme une partie de l'espace. Dans *L'esprit géométrique*, il précise que « l'étendue est ce qui a diverses parties séparées. », *Œuvres* T.II, [31] p.168
[168] Pascal, *De l'esprit géométrique*, [31] p.168-169

> principe 10 les surfaces peuvent différer de situation de longueur de largeur de contenu, de direction. Les surfaces planes sont bornées de toute part par des lignes droites et qui s'étendent directement de l'une à l'autre[169].

La prise en compte, dans l'espace de la géométrie, de la *situation* du point, des lignes et des surfaces conduit Pascal à l'étude des rapports qu'entretiennent ces différents objets. Ainsi, à la suite des principes, *L'introduction à la géométrie* contient douze énoncés qui portent sur les problèmes de position et d'inférence. Certains de ces résultats sont présents chez Euclide, d'autres, par contre, sont entièrement nouveaux.

> 6. l'intersection de deux lignes est un point[170].
> 7. si par un point pris au-dedans d'un espace borné de toutes parts par une ou plusieurs lignes passe une droite infinie, elle coupera les lignes qui bornent cet espace en deux points pour le moins[171].

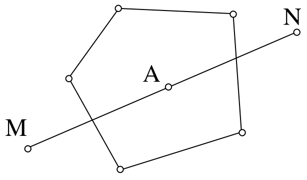



FIG. 23 – Théorème 7

Pour définir l'intersection, Pascal utilise un énoncé très général dans lequel la nature des lignes n'est pas spécifiée. Les

[169] [25] p.282-283

[170] [25] p.283

[171] [25] p.283. Ici et dans toute la suite, les figures sont un ajout visant seulement à faciliter la compréhension.

théorèmes 7 à 12 précisent, dans les cas des droites et des cercles, comment ce principe, qui concerne à la fois les liens structurels entre les objets (points et lignes) et la continuité de l'espace, se met en œuvre. Dans le théorème 7, Pascal énonce un résultat de topologie dont l'équivalent moderne est exprimé par l'axiome de Pasch. Dans la géométrie euclidienne, si une droite coupe le côté AB d'un triangle ABC, sans passer par C, alors elle coupe l'un des deux autres côtés. Cette première formulation d'un tel principe dans un ouvrage de géométrie montre que le point de vue des géomètres sur leur discipline a changé, et que des résultats, autrefois considérés comme évidents, doivent être explicitement énoncés

> 8. s'il y a deux points l'un au-deçà l'autre au-delà d'une ligne droite ; alors une ligne droite qui tend d'un point à l'autre coupe la ligne droite qui est entre les deux, en un point et en un seul[172].

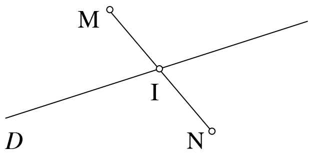



FIG. 24 – Théorème 8

Le fait de couper nécessairement une droite lorsqu'on passe d'un côté à l'autre est une conséquence de la partition de l'espace en deux demi-plans par une droite infinie. La partition est implicitement admise ; par contre, Pascal impose l'unicité du point d'intersection entre deux droites, ce qui le place d'emblée dans un espace euclidien.

> 9. la ligne droite infinie qui passe par un point qui soit au-dedans d'un cercle coupe la circonférence

[172] [25] p.283

en deux points et en deux seulement[173].

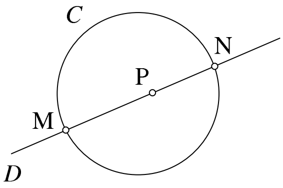



FIG. 25 – Théorème 9

Dans le prolongement des axiomes concernant les droites, Pascal passe ensuite à l'étude du cercle. Concevoir l'intersection d'une droite et d'un cercle nécessite l'unicité de la droite joignant deux points. Pascal n'utilise pas ce résultat ; il pose directement l'existence des deux points d'intersection et se sert implicitement des propriétés caractéristiques du cercle et du théorème 7.

> 10. la circonférence qui passe par deux points l'un au-dedans d'un autre cercle, et l'autre au-dehors le coupe en deux points, et en deux seulement.
> 11. Si deux circonférences ont réciproquement des points l'un au-dedans de l'autre elles s'entrecouperont en deux points et deux seulement.
> 12. Si une circonférence a un de ses points au-deçà d'une ligne droite infinie, et son centre au-delà ou dans la même ligne droite, elle coupera la même ligne droite en deux points[174].

Tant pour les droites que pour les cercles, Pascal ne cherche pas à réduire le nombre des théorèmes connus naturellement de sorte qu'ils forment une axiomatique minimale. Dans cette *Introduction* à la géométrie élémentaire, l'objectif est seulement de rendre compte de la possibilité des constructions

[173] [25] p.283
[174] [25] p.283

géométriques à la règle et au compas. Néanmoins, par la présence explicite de propriétés topologiques essentielles dans ce traité à visée pédagogique, Pascal rappelle que l'espace est le véritable objet de la géométrie et que cette discipline n'est autre que l'étude de ses propriétés.

## *Le remaniement des Éléments*

En 1675, Roberval s'annonce prêt à publier ses *Éléments de géométrie* et ainsi donner sa propre vision de cette discipline tant dans ses objets que dans ses méthodes. Dans cet ouvrage, Roberval ne part pas d'un espace continu préexistant dont les figures seraient des parties, il reconstruit ces notions. Roberval définit comme *permanent*[175] ce dont les parties coexistent et de cette manière affirme l'existence d'objets continus. Cette définition permet de concevoir immédiatement son contraire, à savoir la *non-permanence*.

> 12ème définition
> Successif est ce dont toutes les portions n'existent pas à la fois mais en divers temps.
> 13ème définition
> L'éloignement de deux choses l'une de l'autre est ce qu'il s'en faut que ces deux choses ne soient ensemble[176].

De la distinction entre deux objets issue de l'idée de non-permanence, Roberval déduit l'existence d'une séparation spatiale. À partir de ces premières définitions, l'étendue se définit comme l'ensemble des éloignements[177] et les solides comme des parties de cet espace. Selon Roberval, on ne peut

[175] Roberval, *Éléments de géométrie*, [40], p.93
[176] [40] p.93
[177] « 14ème définition. Un continu permanent est dit être étendu quand, dans icelui, on peut prendre quelques endroits entre lesquels il y a de l'éloignement ; et l'étendue d'un tel continu consiste en tous les éloignements qui sont entre tous les endroits qu'on peut prendre en icelui et cette étendue du continu est sa grandeur. », [40] p.93-94

sortir d'un solide sans parcourir un espace étendu en longueur, largeur et profondeur car ces dimensions intuitivement admises constituent un absolu qu'on ne saurait dépasser. À partir de là, Roberval revient à la construction classique des différentes sous-dimensions par l'introduction de la notion d'extrémité. Dans les définitions 16, 17 et 18, il met successivement en place la surface comme limite du solide, la ligne comme limite d'une surface et finalement le point comme limite indivisible de la ligne. Les objets employés par Roberval sont ceux de la géométrie traditionnelle et ce qu'il décrit comme l'ensemble des éloignements entre les endroits n'est autre que l'ensemble des distances entre les points d'un objet géométrique.

Chez Roberval, la nature abstraite des objets géométriques est assurée par le premier postulat[178] qui n'est pas sans rappeler les conceptions aristotéliciennes de la géométrie. Néanmoins, les géomètres ont besoin de tracer des lignes et des points quelconques, dans ou hors d'une figure et ce indépendament d'un solide dont ils seraient abstraits. Cette nécessité n'échappe pas à Roberval qui propose de laisser le mathématicien libre d'imaginer ses figures.

> 7ème postulat
> Quelque grand que soit un solide fini et terminé, l'esprit s'en peut encore représenter un plus grand et même de sorte que le plus grand contiendra entièrement le moindre et le surpassera de toutes parts, le petit étant une portion du plus grand. On peut aussi entendre que ces solides inégaux soient entièrement séparés de lieu[179].

[178] « Premier postulat. Il y a des solides qui sont considérés comme matériels ; on les appelle communément des corps. D'autres solides sont considérés sans matière quand ce ne serait que par une abstraction mentale de l'esprit qui, séparant mentalement la matière, ne considère que l'étendue ou l'espace et ceux-ci sont appelés simplement des solides ou des solides mathématiques. », [40] p.97

[179] [40] p.99

Par l'esprit, le géomètre peut toujours concevoir un solide englobant un autre plus petit, et ce indéfiniment. Ainsi, s'il est nécessaire de penser un point hors d'une figure, ce point existera car il peut être conçu dans un solide enveloppant la figure. La vision de l'espace géométrique de Roberval est donc celle d'un emboîtement de solides s'étendant aussi loin que l'on veut. L'utilisation de solides chaque fois terminés permet d'assurer l'existence de tous les sous-objets de l'espace comme les surfaces, les lignes ou les points. Cet aspect fonde l'existence de tous les objets de la géométrie à partir de l'existence intuitive du solide fini. Ce solide primitif est conçu dans une extension tridimensionnelle, implicitement admise, où le lieu est vu comme un ensemble de distances entre les points.

### *Le projet géométrique leibnizien*

> On ne voit pas encore dans l'Analyse Géométrique une discipline achevée. Même si, en effet, la méthode de Viète et de Descartes permettait d'y faire presque tout par calcul, en faisant la supposition des Éléments, ce sont eux qui, pour la plupart, n'y ont pas encore été réduits[180].

C'est par ce constat que débute l'un des textes de Leibniz pour qui, malgré les beaux résultats obtenus par l'approche analytique, il reste à montrer comment les fondements de la géométrie, c'est-à-dire les *Éléments* d'Euclide, peuvent se ramener à de tels calculs. Leibniz doute que cela soit possible et il propose d'inventer un nouveau langage[181] permettant de

[180] G.W.Leibniz, *La caractéristique géométrique*, [28] p.51

[181] « J'ai déjà songé à palier ce défaut en tâchant de faire apparaître dans un calcul tout ce qui concerne la figure et la situation, ce qui est nouveau : les Analystes se contentent d'y faire entrer les grandeurs en supposant les situations connues à partir de la figure, ils ne peuvent donc se dispenser de tracer des lignes et des figures et de mettre à contribution l'imagination. », [28] p.51-53

rendre compte de la situation des divers objets géométriques d'un problème. Il cherche ainsi une discipline qui se situe en amont des *Éléments* d'Euclide et dont ils peuvent être déduits.

### *Élaboration des notations*

Après de nombreuses études préliminaires, Leibniz s'engage dans la rédaction finale de son projet de langage géométrique. Dans un fragment intitulé *characteristica geometrica, scheda 3*, daté d'août 1679, il définit les concepts qui vont permettre de réduire la géométrie à un calcul.

> $\infty$ signifie identique, par exemple A$\infty$B signifie que les points A et B coïncident, en d'autres termes qu'ils sont en même temps dans le même lieu.
> $\gamma$ signifie congru, c'est-à-dire pouvant occuper le même lieu en gardant la situation de ses parties.
> $\Pi$ signifie égale, c'est-à-dire ce qu'on peut rendre congru, après modification de la situation des parties si nécessaire. $+$a$+$b$\Pi$c signifiera que c est le tout, a, b les parties[182].

Leibniz commence par définir l'*identité* de deux objets géométriques. Pour lui, il s'agit de pouvoir rendre compte de deux objets qui se trouvent dans une même situation de manière absolue. La notion de temps invoquée est à prendre dans un sens abstrait car Leibniz ne cherche pas à concevoir la simultanéité mais bien à définir une égalité absolue entre deux choses tant dans leur nature que dans leurs relations à l'espace tout entier. Cette première définition prend son sens avec les deux suivantes où Leibniz élimine progressivement les caractères à égaler. La deuxième notion est la *congruence*. Ce concept est présent depuis les *Éléments* d'Euclide, mais

[182] [28] p.117

Leibniz le remanie afin de le rendre plus opératoire. Par rapport à l'identité, la congruence n'impose pas la simultanéité. Avec cette deuxième définition, Leibniz justifie l'utilisation des déplacements qui permettent de mouvoir une figure d'un lieu à un autre sans changer la situation. La troisième et dernière notion est l'*égalité*. Pour cette dernière, toutes les opérations sur la situation des parties sont possibles, de sorte que Leibniz ne conçoit que l'étendue des objets. Pour rendre opératoire ces premiers concepts, Leibniz formalise ensuite la notion de relation.

> A.B. représentera la relation entre A et B. De la même manière, A.B.C. la relation entre A, B, C[183].

L'utilisation d'un simple point pour désigner la relation entre deux points permet à Leibniz d'obtenir une généralité plus grande et une souplesse dans les calculs. Désormais, cas général et cas particuliers peuvent s'exprimer dans un même langage.

### *Une nouvelle définition des objets*

Dans la nouvelle théorie proposée par Leibniz, la notion première est l'espace, qu'il commence par débarrasser de toutes attaches sensibles.

> Pour traiter tout ceci dans l'ordre, il faut savoir que la première chose à considérer est l'Espace lui-même soit l'Extensum pur et absolu ; en disant pur, je veux dire pur de toute matière et de tout mouvement, en disant absolu je veux parler d'un espace illimité et renfermant toute extension[184].

L'espace de la géométrie est immatériel et immobile, en d'autres termes il s'agit d'un espace abstrait sans autre propriété

[183] [28] p.119
[184] [28] p.151

que celle d'être infini et de contenir l'extension[185]. Deuxième objet dans l'ordre de la construction théorique, le point est la marque de la position, ou de la situation. Pour Leibniz « le point est un minimum dénué de parties » et « tous les points sont congrus deux à deux donc également semblables, et si l'on peut dire égaux. » Cette unicité des points est essentielle car c'est par elle que la congruence est possible. La considération de points isolés dans l'espace ne peut constituer en soi une géométrie car chaque point peut être congru à n'importe quel autre donc il ne saurait y avoir de figures. Pour pouvoir concevoir les figures géométriques, Leibniz renvoie à la notion d'existence simultanée de plusieurs points qui permet d'introduire l'idée d'une relation entre ces objets.

Le géométrie de Leibniz repose sur l'idée de congruence et de ce fait ne permet pas de définir de position absolue dans l'espace. Ainsi, « à tout objet situé dans l'espace on peut faire correspondre une infinité d'autres objets qui lui soient congrus » et « tout objet peut être déplacé d'une infinité de façons en conservant sa figure propre. »

> Car deux objets étant congrus, l'un peut prendre la place de l'autre, et rien n'empêche de déplacer en même temps qu'un objet le lieu qu'il occupe, puisqu'il n'y a aucune raison de les dissocier, or ce qu'on peut faire correspondre à l'un de deux objets congrus, on pourra de façon similaire le faire correspondre à l'autre[186].

La première partie de la construction théorique permet de faire des objets de la géométrie des entités relationnelles. Dès

[185] À ce sujet, Y.Belaval explique dans *Leibniz, initiation à sa philosophie*, [8] p.225 : « De la qualité extensive qui se répand partout comme la blancheur dans le lait, la dureté dans le diamant, l'antitypie dans la matière, ils [les esprits des hommes] abstraient l'idée de l'étendue mathématique. A cette étendue abstraite, homogène, ils peuvent désormais appliquer les rapports de coexistence de l'espace, et c'est pourquoi l'espace sert à mesurer l'étendue. »

[186] [28] p.205

lors, pour Leibniz, il y a concordance entre le lieu d'un objet et la figure dont la principale caractéristique réside dans les relations entre ses constituants. Dans cette géométrie des relations, lieux et objets se confondent pour devenir le véritable sujet d'étude de cette discipline.

> En résumé : d'un point quelconque à un point quelconque, on peut concevoir qu'une ligne a été tracée et qu'il s'agit d'une ligne rigide.
> A.B représente la situation mutuelle de A et B, c'est-à-dire un tracé rigide passant par A et B, que nous pouvons ramener à une ligne ; A.B.C représente donc un autre tracé rigide passant par A, B, C[187].

Leibniz identifie la relation à une ligne rigide ce qui la place, de fait, parmi les objets de la géométrie. La relation entre A et B, n'est plus seulement un concept abstrait cherchant à rendre compte de la situation de chacun, c'est une ligne géométrique invariante soumise aux règles de la discipline. L'un des principaux atouts d'un système de notation tel que celui mis en place par Leibniz est de permettre la reformulation du concept d'espace. Toujours en utilisant la congruence, Leibniz peut maintenant donner une formule correspondant à la définition de l'espace.

> Si Y $\gamma$ (Y) le lieu de tous les Y, soit $\bar{\mathrm{Y}}$, sera l'extensum absolu qui n'est autre que l'Espace. Car le lieu de tous les points congrus entre eux est celui de tous les points en général, puisque tous les points sont congrus[188].

Par convention, les points fixes sont notés par les premières lettres de l'alphabet et les points variables par les dernières ou, si cela s'avère nécessaire, par la lettre entre parenthèses.

[187] [28] p.215
[188] [28] p.221

> Il en va de même si on a Y $\gamma$ A, car, par définition des caractères, Y $\gamma$ A entraînera (Y) $\gamma$ A et donc Y $\gamma$ (Y). Le lieu de tous les points Y congrus à un point donné A est en fait une nouvelle fois l'espace indéterminé lui-même, tous les points étant congrus à un point donné quelconque[189].

Le travail d'écriture proposé par Leibniz n'est pas un simple jeu de notation car la notion d'espace comme universel utilisable pour le géomètre prend toute sa signification lorsque le point de départ n'est plus un point Y quelconque, mais un point A donné. L'intérêt du passage d'un point quelconque à un point déterminé réside dans l'introduction d'une sorte d'origine à la définition des relations dans une figure. Ce faisant, Leibniz peut ensuite définir clairement un objet géométrique à partir des relations avec un point donné. Comme du point A, c'est l'espace tout entier qui peut être atteint, le géomètre peut alors déterminer tout type d'objet à partir d'une origine unique. Leibniz utilise cette possibilité pour redéfinir les objets élémentaires de la géométrie comme, par exemple, la sphère ou le plan.

> Nous obtenons immédiatement après A.Y $\gamma$ A(Y), le lieu de tous les Y, soit $\bar{\mathrm{Y}}$, sera nommé sphère. Si A.Y $\gamma$ B.Y le lieu $\bar{\mathrm{Y}}$ de tous les Y sera nommé plan[190].

Dans ces formules, le ou les points de référence peuvent avoir un rôle particulier ou non. Par exemple, le point A dans la formule de la sphère n'est autre que le centre de celle-ci, ce que Leibniz remarque en le définissant à cette occasion.

### *Simultanéité et existence*

Le langage géométrique mis en place, il reste à Leibniz à régler la question cruciale de l'existence des objets dont il

[189] [28] p.221
[190] [28] p.221-223

veut traiter. Du fait de l'absence de situation absolue dans l'espace, c'est par la mise en présence de deux objets simultanément que peut être définie une relation. Pour Leibniz, la *situation* est donc directement liée à ce qu'il nomme la *coperception*.

> Lorsque deux objets sont perçus simultanément dans l'espace, est perçue par là même une trajectoire allant de l'un à l'autre. Or deux points sont congrus. Ce qu'on perçoit en percevant simultanément deux points est donc une ligne, soit la trajectoire d'un point[191].

Ce passage de la perception simultanée à l'idée de ligne permet de mathématiser l'existence des objets dans l'espace.

> Lorsque nous percevons l'existence d'une chose, nous percevons du même coup qu'elle existe dans l'espace, c'est-à-dire que peuvent exister une infinité d'autres choses qu'on ne pourrait en aucune façon distinguer d'elle[192].

L'espace ne permet pas à lui seul une détermination absolue des objets, donc Leibniz doit montrer en quoi un objet existe spatialement. Il renvoie alors une nouvelle fois à la notion fondamentale de congruence qui permet de concevoir tant l'objet lui-même que tous ceux qui lui sont congrus. L'objet géométrique n'est pas une entité unique, mais le représentant de toute une classe de congruence.

> L'Extensum est un continuum. Dans un extensum peuvent apparaître des parties. Dans un extensum il y a une infinité de manières de faire naître des parties. Une partie d'un extensum est un extensum.
>
> Le lieu d'un extensum est lui-même un exten-

[191] [28] p.229
[192] [28] p.229-231

> sum. Le lieu d'un extensum est congru à un extensum[193].

La géométrie est, depuis l'origine, la science du continu. Dans son système, de la continuité de l'extensum, Leibniz déduit l'existence de parties. Une *partie* étant aussi un extensum, il y a alors unicité de nature entre tous les espaces et sous-espaces de la géométrie. En affirmant que le lieu est lui aussi un extensum, Leibniz assure l'existence de tous les objets de la géométrie.

### *Réflexions sur les dimensions*

L'étude d'une notion aussi fondamentale que la situation des points dans l'espace amène Leibniz à s'interroger sur les dimensions.

> Remarquons d'ailleurs que le nombre de points dans un même rapport à l'égard de deux points peut être infini, mais que seulement deux d'entre eux peuvent se trouver dans un même plan. À l'inverse on ne peut trouver dans un même corps (c'est-à-dire qu'on ne peut trouver en tout) que deux points ayant un certain rapport à l'égard de trois points donnés définissant un plan[194].

Leibniz explique comment s'organisent les points et les différentes dimensions de l'espace et met en évidence la symétrie qui résulte des calculs. Dans le cas de relations fixes par rapports à deux points donnés, les points possibles se trouvent sur un cercle dans l'espace dont l'axe est la droite formée par les deux points donnés. Un plan contenant l'axe coupe nécessairement ce cercle en deux points seulement. Ainsi, des relations fixes par rapport à deux points A et B (qui déterminent une droite AB), Leibniz déduit l'existence de deux autres points hors de (AB) et donc d'une autre dimension,

---

[193] [28] p.231-233
[194] [28] p.135

celle du plan. Dans le cas de relations fixes à trois points don-

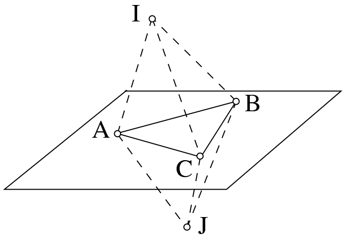



FIG. 26 – Les relations et les dimensions

nés A, B et C (figure 26), Leibniz montre l'existence de deux points distincts, I et J, répondant au problème. Les points I et J se trouvent dans la même situation et ceci implique que ces deux points déterminent une autre dimension que celle du plan défini par les points A, B, et C. Les points I et J sont symétriques par rapport au plan (ABC). La situation déterminée élimine cette symétrie en faisant de I et J deux objets jouant le même rôle. Le solide tridimensionnel apparaît dès lors comme le moyen de prouver la limitation à trois du nombre de dimensions de l'espace.

> Enfin un même corps ne peut contenir plusieurs points qui soient dans un même rapport à l'égard de quatre points constituant un solide. C'est la raison pour laquelle il n'existe pas de dimension au-delà du solide, mais tout ceci nécessiterait une démonstration plus rigoureuse[195].

Dans le cas des solides, la situation diffère car cette fois les contraintes sont telles qu'un seul point peut répondre à la question. Pour Leibniz, il s'agit de la preuve de la tridimensionnalité de l'espace et on ne peut concevoir de points en dehors des solides. Ce que Leibniz considère comme une

[195] [28] p.135

conséquence de ses calculs est en fait un postulat implicite préalable sur les dimensions de l'espace qui limite l'obtention de plus de points. Dans cette géométrie, l'espace se trouve placé en première position. Il est alors considéré comme la pure étendue, certes abstraite, mais pas de dimension quelconque. Malgré ses imperfections, cette réflexion sur l'espace prend une forme opératoire qui ouvre la voie à une réforme de la notion de dimension en géométrie. Cette dernière ne se concrétisera toutefois qu'aux siècles suivants.

# Conclusion

> De même, les géomètres étudient des figures. Les figures sont généralement situées dans des espaces, de sorte que les objets d'étude primitifs du géomètre sont, en fin de compte, les espaces. La création, ou la découverte, d'espaces nouveaux, à usages variés, est l'une des activités majeures des géomètres
>
> Jacques TITS

Penser l'espace, penser les objets géométriques ou encore penser les méthodes géométriques sont les éléments fondamentaux de la constitution de cette discipline. Au cours des vingt siècles qui séparent Euclide de Leibniz, une notion d'espace autonome et propre à la géométrie se met progressivement en place. La prise en compte d'un espace propre à la géométrie, sa mathématisation et finalement l'étude de propriétés intrinsèques font de ce concept le révélateur d'un ensemble de réflexions sur les mathématiques et leur objet. Ceci se prolonge évidemment au-delà de la science elle-même et les questionnements des philosophes sur l'activité mathématique sont loin d'être clos. L'utilisation moderne de la notion d'espace mathématique montre, en partie, ce vers quoi tendaient les développements des anciens géomètres. Le passage, aux 19$^{e}$ et 20$^{e}$ siècles, d'un espace géométrique à une infinité d'espaces abstraits issus du seul jeu d'une bonne axiomatique nécessite encore quelques efforts, mais tous les auteurs précédemment évoqués ont largement préparé le terrain et c'est seulement après leurs travaux que cette autre étape de l'histoire de la géométrie peut avoir lieu.

# Biographies

## Antiquité

---

Hippias d'Elis (env. 460 av.J.C - env. 400 av.J.C.)
Homme d'état et philosophe, on ne connait que peu de chose de cet érudit. En géométrie, il a défini la quadratrice, courbe utilisée pour la trisection des angles.

Démocrite (env.460 av.J.C.- env. 360 av.J.C.)
Philosophe, Démocrite s'intéressa à tous les domaines. Pour les sciences de la nature, il est le représentant de l'atomisme, courant philosophique qui prône l'existence de particules indivisibles.

Platon (427 av.J.C. - 348 av.J.C.)
Philosophe grec, ses écrits prennent souvent la forme de dialogues traitant de toutes les questions sur l'Univers, l'homme ou la cité. Prônant l'existence d'idéalités abstraites, la philosophie platonicienne est intimement liée aux mathématiques.

Aristote (384 av.J.C - 322 av.J.C.)
Philosophe grec, il fut l'élève de Platon contre les thèses duquel il élabora sa propre philosophie. Auteur incontournable de l'Antiquité, Aristote est connu pour ses traités sur la logique, la métaphysique, l'éthique ou encore la physique. L'étude et la critique des thèses aristoliciennes sont une part importante de l'histoire de la philosophie de l'Antiquité à nos jours.

Euclide (env. 300 av.J.C.)
Mathématicien grec de l'Antiquité, Euclide a travaillé dans toutes les branches des mathématiques (arithmétique, géométrie, mécanique, optique...). Certains de ses ouvrages ont été perdus, mais les autres ont consitué une référence et un matériau d'étude pendant plus de 2000 ans.

Archimède (287 av.J.C. - 212 av.J.C.)
Connu surtout pour ses travaux de mécanique, Archimède est aussi un géomètre inventif. Ses travaux sur la mesure du cercle et d'autres figures non rectilignes ont inspiré les recherches sur les mathématiques infinitésimales ultérieures.

Nicomède (env. 280 av.J.C. - env. 210 av.J.C.)
Mathématicien grec connu pour son traité sur la conchoïde, courbe utile à la résolution de nombreux problèmes géométriques.

Apollonius de Perges (262 av.J.C. - 190 av.J.C.)
Géomètre brillant, ses travaux sur les coniques ont été le point de départ de recherches très riches sur ce sujet. On doit à Apollonius de Perges les dénominations ellipse, parabole et hyperbole.

Dioclès (env. 240 av.J.C. - env. 180 av.J.C.)
Dioclès a travaillé sur les propriétés des paraboles et sur la cissoïde.

Pappus d'Alexandrie (env. 290 - env. 350)
Mathématicien de la Grèce antique, ses recensions de résultats sont très précieuses pour la connaissance des mathématiques anciennes. Plus qu'un encyclopédiste, Pappus a également produit des résultats géométriques fondamentaux.

Proclus (411 - 487)
Philosophe et grammairien, Proclus est l'un des principaux commentateurs de Platon.

Philopon (env. 490 - env. 570)
Philosophe, mais aussi mathématicien, physicien et médecin, Philopon est un commentateur d'Aristote. Il s'oppose à l'aristotélisme, principalement sur la question du vide.

Banū Mūsā (env. 800 - env. 860)
Les trois frères Banū Mūsā ont travaillé dans toutes les branches des mathématiques et de l'astronomie. Le cadet, al-Ḥasan s'est plus particulièrement intéressé à la géométrie.

Thābit ibn Qurra (836 - 910)
Ce savant, le plus important de son époque, a travaillé sur la théorie des nombres, la géométrie, l'astronomie ou encore la statique.

Ibrāhīm ibn Sinān (908 - 946)
Mathématicien et astronome, ses travaux en géométrie portent sur les tangentes aux cercles. Il a également fait des recherches liées à des problèmes d'intégration.

Al-Sijzī (env. 945 - env. 1020)
Mathématicien arabe, ses traités portent sur de nombreux domaines dont le tracé continu de coniques et la géométrie sphérique.

Ibn al-Haytham (... - après 1040) dit Alhazen
Mathématicien et savant arabe, ses travaux se situent toujours à la pointe de ce qui se faisait à son époque. Son traité d'optique fut la référence pour toutes les recherches après le Moyen-Âge.

Ibn al-Samḥ (979 - 1035)
Les écrits et les notes de ce mathématicien andalou ont permis de retrouver les travaux de plusieurs de ses prédécesseurs.

Al-Khayyām (1048 - 1122)
Mathématicien et astronome, ses travaux en algèbre ont été une base pour de nombreuses recherches ultérieures.

Sharāf al-Dīn al-Ṭūsī (env. 1135 - 1213)
Géomètre arabe, il est connu pour son traité sur les équations cubiques.

Bradwardine Thomas (env. 1295 - 1349)
Théologien et mathématicien, il a commenté les écrits d'Aristote et utilise les mathématiques comme moyen de preuve théologique.

Alberti Leon Battista (1404 - 1472)
Peintre, par son utilisation de la géométrie il est l'un des réformateurs des règles de la représentation en perspective.

della Francesca Piero (env. 1412 - 1492)
Peintre, il mêle géométrie et art dans ses compositions. Piero della Francesca est l'un des artisans de la mathématisation de la perspective.

de Vinci Léonard (1452 - 1519)
On ne présente plus ce savant universel. Peintre et inventeur, il considérait l'art comme moyen ultime d'étude de la nature.

Dürer Albrecht (1471 - 1528)
Peintre, graveur et mathématicien connu pour son traité sur la perspective en peinture.

Galilée (1564 - 1642)
Ce savant italien est principalement connu pour ses travaux sur la chute des corps et pour son utilisation de la lunette astronomique. Pour son recourt systématique à l'expérience, il est souvent, un peu abusivement, considéré comme le père de la science moderne.

Desargues Girard (1591 - 1661)
Mathématicien français, ses études sur les sections coniques sont considérées comme les premiers travaux de géométrie projective.

Descartes Renée (1596 - 1650)
Connu pour ses traités de philosophie, Descartes a aussi proposé des résultats importants en optique et en géométrie. Son travail sur les équations des courbes est un élément de la mise en place de la géométrie analytique.

Fermat Pierre (1601 - 1665)
Notable toulousain, ses travaux en géométrie participent à la naissance de la géométrie analytique. Fermat est également connu pour son théorème en théorie des nombres qui résista plusieurs siècles aux mathématiciens.

Roberval Gilles Personne de (1620 - 1675)
Mathématicien, il a principalement travaillé sur des méthodes d'intégration.

Pascal Blaise (1623 - 1662)
Penseur et scientifique, il toucha à toutes les branches des mathématiques, arithmétique, géométrie, mais aussi dénombrement et probabilités.

Leibniz Gotfried Wilhelm (1646 - 1716)
Philosophe universel, Leibniz fut aussi un mathématicien à la pointe de la recherche de son temps. Il est principalement connu pour son élaboration du calcul différentiel et intégral.

Klein Felix (1848 - 1925)
Mathématicien allemand, il élabora les principes permettant d'unifier les différentes géométries. Ces résultats firent l'objet d'un discours, prononcé lors de sa prise de fonction à l'université, connu sous le nom de *Programme d'Erlangen*.

Hilbert David (1862 - 1943)
Ses travaux sur la géométrie sont aussi importants que ceux d'Euclide. Hilbert est l'un des mathématiciens les plus brillants de son époque et il est connu pour avoir laissé aux mathématiciens une série de problèmes très difficiles mais fondamentaux.

# Bibliographie

[1] dir. Rashed Roshdi. *Histoire des sciences arabes,* 3 tomes. Le Seuil, 1997.

[2] Alquié Ferdinand. *Descartes*. Hatier, 1956.

[3] Apollonius de Perges. *Coniques,* Trad. Paul ver Eecke. Blanchard, 1963.

[4] Archimède. *Œuvres,* Trad. C.Mugler. Belle lettres, 1972.

[5] Aristote. *Métaphysique*. Vrin, 2002.

[6] Aristote. *Physique*. Vrin, 2002.

[7] Barbin Evelyne et Caveing Maurice. *Les philosophes et les mathématiques*. Ellipses, 1996.

[8] Belaval Yvon. *Leibniz, initiation à sa philosophie*. Vrin, 2005.

[9] Biard Joël. *De la théologie aux mathématiques : l'infini au XIVe siècle*. Belles lettres, 2005.

[10] Crozet Pascal. L'idée de dimension chez Al-Sijzī. *Arabic Sciences and Philosophy*, III :251–286, 1993.

[11] Desargues Girard. *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du cone avec un plan*. Paris, 1639.

[12] Descartes René. *Discours de la méthode, plus la dioptrique, les météores et la géométrie*. Fayard, 1987.

[13] DESCARTES René. *Œuvres*. Vrin, 2000.

[14] DESCARTES René. *Règles pour la direction de l'esprit*. Vrin, 2003.

[15] EUCLIDE. *Les œuvres d'Euclide,* Trad. F.Peyrard. Blanchard, 1966.

[16] EUCLIDE. *Les Éléments d'Euclide,* Trad. B.Vitrac. PUF, 1990-2001.

[17] FEDERSPIEL M. *Sur la définition de la droite,* in *Mathématiques et philosophie de l'antiquité à l'âge classique,* dir. R.Rashed. CNRS, 1991.

[18] FERMAT Pierre. *Œuvres*. Gauthier Villars, 1922.

[19] GALILEO Galilei. *L'essayeur*. Belles lettres, 1989.

[20] GRANGER Gilles Gaston. *La théorie aristotélicienne de la science*. Aubier, 1976.

[21] HEATH Thomas. *A history of greek mathematics*. Dover, 1981.

[22] HILBERT David. *Les fondements de la géométrie*. Dunod, 1971.

[23] HOUZEL Christian. *La géométrie algébrique*. Blanchard, 2002.

[24] IFRAH Georges. *Histoire universelle des chiffres*. Robert Laffont, 1994.

[25] ITARD Jean. *Essai d'histoire des mathématiques*. Blanchard, 1984.

[26] JAMMER Max. *Concepts of space*. Dover, 1993.

[27] KLEIN Felix. *Le programme d'Erlangen*. Jacques Gabay, 1991.

[28] LEIBNIZ Gottfried Wilhelm. *La caractéristique géométrique*. Vrin, 2002.

[29] NETZ Reviel. *The shaping of deduction in greek mathematics*. Cambridge University Press, 1999.

[30] Pappus d'Alexandrie. *La collection mathématique,* Trad. P. ver Eecke. Blanchard, 1982.

[31] Pascal Blaise. *Œuvres*. Seuil, 1963.

[32] Philoponus. *Corollary on place and Void,* Trans. D.Furley & C.Wildberg. Duckworth, 1991.

[33] Proclus. *Commentaire au premier livre des Éléments d'Euclide,* Trad. P. ver Eecke. Desclée de Brouwer, 1948.

[34] Rashed Roshdi. *Sharāf, al-Dīn al-Ṭūsī, Œuvres mathématiques*. Les Belles Lettres, 1986.

[35] Rashed Roshdi. *Les mathématiques infinitésimales du 9e au 11e siècle, vol.I.* Al-Furqān Islamic Heritage Foundation, 1996.

[36] Rashed Roshdi. *Les mathématiques infinitésimales du 9e au 11e siècle, vol.III.* Al-Furqān Islamic Heritage Foundation, 2000.

[37] Rashed Roshdi. Fermat and algebraic geometry. *Historia Scientiarum*, 11.1 :24–47, 2001.

[38] Rashed Roshdi. *Les mathématiques infinitésimales du 9e au 11e siècle, vol.IV, Ibn al-Haytham, Méthodes géométriques, transformations ponctuelles et philosophie des mathématiques*. Al-Furqān Islamic Heritage Foundation, 2002.

[39] Rashed Roshdi et Vahabzadeh Bijan. *Al-Khayyām mathématicien*. Blanchard, 1999.

[40] Roberval Gilles Personne de. *Éléments de géométrie*. Vrin, 1996.

[41] Ross David. *Aristote,* Trad. J.Samuel. Gramma, 2000.

[42] Vinciquerra Lucien. *Archéologie de la perspective : Sur Piero della Francesca, Vinci, Dürer*. PUF, 2007.

[43] Vuillemin Jules. *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*. PUF, 1997.

# Annexe 1 : les *Lieux plans*

> Si d'un point donné, ou de deux, l'on mène deux droites ; si celles-ci constituent une seule droite, ou sont parallèles, ou comprennent un angle donné ; si elles ont entre elles un rapport, ou comprennent une aire donnée, et si l'extrémité de l'une de ces droites appartient à un lieu plan donné de position, l'extrémité de l'autre droite appartiendra aussi à un lieu plan donné de position, du même genre que le premier ou d'un genre différent, et qui sera disposé semblablement au premier par rapport à la droite, ou disposé d'une manière opposée. Ces choses auront lieu d'ailleurs d'après les différences que présentent les hypothèses.
>
> Apollonius de Perges, *Lieux plans*, cité par Pappus

Décomposons cette longue proposition pour mieux saisir son contenu. Pour la première hypothèse, nous avons en fait trois possibilités que nous allons appeler $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, et $\mathcal{H}_3$.

- Dans le cas $\mathcal{H}_1$, nous aurons deux segments, $MA$ et $AN$ portés par une même droite et ayant un point commun donné.
- Le cas $\mathcal{H}_2$ sera celui de deux segments parallèles, $AM$ et $BN$, issus de deux points donnés $A$ et $B$.
- Enfin, l'hypothèse $\mathcal{H}_3$ sera celle de deux droites $AM$ et $BN$ issues de deux points donnés $A$ et $B$ et se coupant en $I$ où elles forment un angle donné.

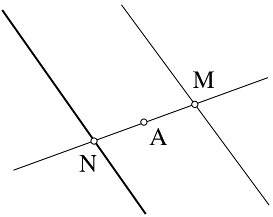
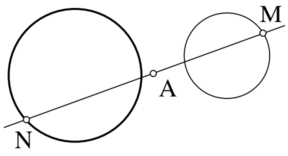
Après ces hypothèses décrivant le type de construction géométrique dont le géomètre va user, Pappus considère deux types de liens entre les droites en questions.

- Soit on en connaît le rapport, cas $\mathcal{L}_1$.
- Soit elles déterminent une aire donnée, cas $\mathcal{L}_2$.

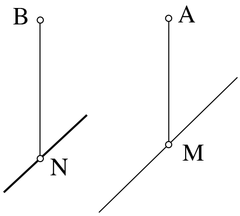
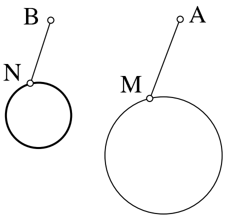
Finalement, la description de la situation géométrique se termine par l'hypothèse concernant le lieu décrit au départ qui peut être :

- un cercle $\mathcal{C}$.
- ou une droite $\mathcal{D}$.

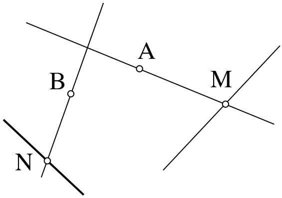
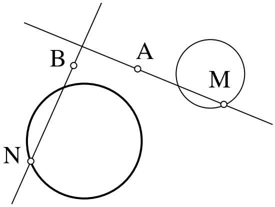
Regardons successivement tous les cas possibles.

| Cas $\mathcal{H}_1\mathcal{L}_1$ | |
|---|---|
| Cas $\mathcal{D}$ : On considère le point $A$ et les deux demi-droites $MA$ et $NA$, portée par la même droite. Le rapport $\frac{MA}{NA} = \frac{a}{b}$ est donné. Le point $M$ décrit une droite. On obtient une droite.   | Cas $\mathcal{C}$ : idem mais $M$ décrit un cercle. On obtient un cercle.   |

La situation $\mathcal{H}_1\mathcal{L}_1$ est une homothétie de rapport $\frac{a}{b}$. Nous retrouvons donc tous les résultats concernant cette transformation avec en premier lieu le fait que si $M$ décrit une droite ou un cercle, $N$ décrira respectivement une droite ou un cercle. Pappus ne détaille pas les différents cas et il n'évoque pas les liens entre le lieu décrit par $M$ et celui décrit par $N$ comme le parallélisme des droites ou le rapport entre les rayons. Par contre, il évoque le cas d'une figure dont l'orientation serait inversée et qui correspond au cas d'une homothétie de rapport négatif, c'est-à-dire lorsque les points $M$ et $N$ se trouvent de part et d'autre de $A$. Ceci sous-entend l'intuition d'une orientation des angles dans le plan, ce qui est conforme à ce que nous avons dans la donnée de position.

| Cas $\mathcal{H}_2\mathcal{L}_1$ | |
|---|---|
| Cas $\mathcal{D}$ : On considère les points $A$ et $B$ et les deux demi-droites $MA$ et $NB$. Le rapport $\frac{MA}{NB} = \frac{a}{b}$ est donné. $M$ décrit une droite. On obtient une droite.   | Cas $\mathcal{C}$ : idem mais $M$ décrit un cercle. On obtient un cercle.   |

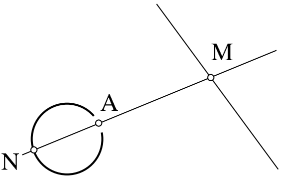
Ici, partant d'une droite (respectivement d'un cercle), nous obtenons toujours une droite (respectivement un cercle). Comme précédemment, nous pouvons retrouver la transformation correspondante et il s'agit ici de la composée d'une homothétie de centre $A$ et de rapport $\frac{a}{b}$ et d'une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

<table>
<tr><td colspan="2">Cas $\mathcal{H}_3\mathcal{L}_1$</td></tr>
<tr><td>Cas $\mathcal{D}$ : On considère deux points $A$ et $B$, et deux droites $MA$ et $NB$ formant un angle constant $\theta$. Le rapport $\frac{MA}{NB} = \frac{a}{b}$ est connu. $M$ décrit une droite. On obtient une droite.<br><br></td>
<td>Cas $\mathcal{C}$ : idem mais $M$ décrit un cercle. On obtient un cercle.<br><br></td></tr>
</table>

Ce cas $\mathcal{H}_3\mathcal{L}_1$ est aussi une composée de deux transformations. Nous sommes en fait en présence de la composée de l'homothétie de centre $A$ et de rapport $\frac{a}{b}$ et de la rotation de centre le point d'intersection des droites $MA$ et $NB$ et d'angle $\theta$. Une fois de plus, lorsque $M$ décrit une droite (respectivement un cercle) le lieu reste une droite (respectivement un cercle).

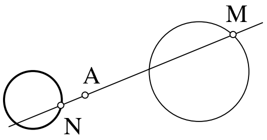
Cas $\mathcal{H}_1\mathcal{L}_2$

Cas $\mathcal{D}$ : On considère le point $A$ et les deux demi-droites $MA$ et $NA$, portée par la même droite. Le produit $MA \times NA = a \times b$ est donné. Le point $M$ décrit une droite.

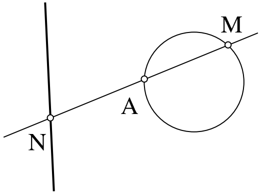



On obtient un cercle, sauf si $A$ appartient à la droite décrite par $M$ auquel cas $N$ décrira cette même droite.

Cas $\mathcal{C}$ : idem mais $M$ décrit un cercle.



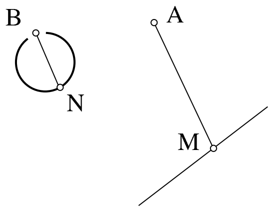

On obtient un cercle, sauf si le point $A$ appartient au cercle décrit par $M$. Dans ce cas, $N$ décrira une droite.



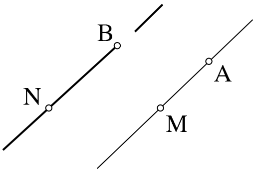

Ce type de transformations géométriques qui, sous certaines conditions, transforment les droites en cercles et réciproquement sont appelées des inversions. Pour les cas qui vont suivre, nous allons retrouver des composées, mais cette fois avec une inversion.

Cas $\mathcal{H}_2\mathcal{L}_2$

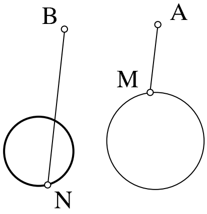
Cas $\mathcal{D}$ : On considère les points $A$ et $B$ et les deux demi-droites $MA$ et $NB$. Le produit $MA \times NB = a \times b$ est donné. $M$ décrit une droite.



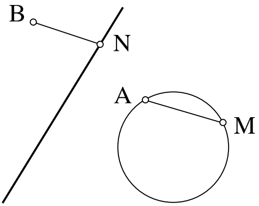

On obtient un cercle, sauf si $A$ est sur la droite décrite par $M$, auquel cas on obtient une droite parallèle passant par $B$.




Cas $\mathcal{C}$ : idem mais $M$ décrit un cercle.



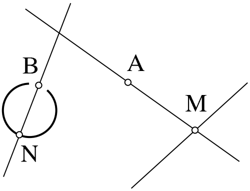

On obtient un cercle, sauf si $A$ est sur le cercle décrit par $M$ auquel cas on obtient une droite.




Nous avons cette fois la composée d'une inversion et d'une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

<table>
<tr><td colspan="2">Cas $\mathcal{H}_3\mathcal{L}_2$</td></tr>
<tr><td>

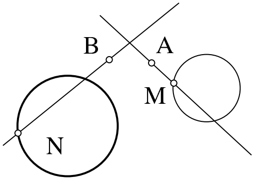
Cas $\mathcal{D}$ : On considère deux points $A$ et $B$, et deux droites $MA$ et $NB$ formant un angle constant $\theta$. Le produit $MA \times NB = a \times b$ est connu. $M$ décrit une droite.



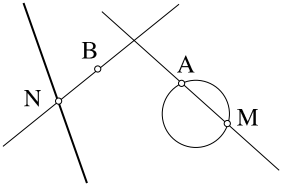

On obtient un cercle, sauf si $A$ est sur la droite décrite par $M$, auquel cas on obtient une droite image de la droite décrite par $M$ par la rotation de centre le point d'intersection des deux droites et d'angle $\theta$.

</td><td>

Cas $\mathcal{C}$ : idem mais $M$ décrit un cercle.




On obtient un cercle, sauf si $A$ est sur le cercle décrit par $M$, auquel cas on obtient une droite.




</td></tr>
</table>

# Annexe 2 : les *Connus* d'Ibn al-Haytham

<table>
<tr><td rowspan="29">Quantité</td><td rowspan="7">Discrète</td><td rowspan="3">Lettres</td><td>Essence</td><td rowspan="17"></td></tr>
<tr><td>Nombre</td></tr>
<tr><td>Arrangement</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Nombres</td><td>Essence</td></tr>
<tr><td>Quantité</td></tr>
<tr><td>Propriétés</td></tr>
<tr><td>Association</td></tr>
<tr><td rowspan="22">Continue</td><td rowspan="3">Temps</td><td>Essence</td></tr>
<tr><td>Grandeur</td></tr>
<tr><td>Rapport</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Poids</td><td>Essence</td></tr>
<tr><td>Grandeur</td></tr>
<tr><td>Rapport</td></tr>
<tr><td rowspan="14">Ligne</td><td>Essence</td></tr>
<tr><td>Extrémité</td></tr>
<tr><td>Figure</td></tr>
<tr><td>Grandeur</td></tr>
<tr><td rowspan="8">Position</td><td>Par rapport à :</td></tr>
<tr><td>Des points fixes</td></tr>
<tr><td>Un point fixe</td></tr>
<tr><td>Un ou des points mobiles</td></tr>
<tr><td>Une ligne fixe</td></tr>
<tr><td>Une ligne mobile</td></tr>
<tr><td>Une surface fixe</td></tr>
<tr><td>Une surface mobile</td></tr>
<tr><td>Rapport</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Composition</td></tr>
<tr><td>Surface</td><td colspan="2">Idem ligne *</td></tr>
<tr><td>Solide</td><td colspan="2">Idem surface **</td></tr>
</table>

* Sauf en ce qui concerne les extrémités qui sont des lignes.

** Sauf la composition car la composition des solides provient de la composition de la position de leur surfaces. Et sauf la position qui provient aussi de celle des surfaces.

# Sommaire